Introducción

Este libro está dirigido a estudiantes de las Olimpiadas de Matemáticas que quieren prepararse en el estudio de desigualdades, tema ahora frecuente en los concursos de matemáticas de distintos niveles. En este volumen se presentan las desigualdades clásicas y desde luego las más útiles para enfrentar y resolver problemas de optimización.

Para la presentación de los temas, el libro se ha dividido en cuatro capítulos. El capítulo 1 de desigualdades numéricas contiene las desigualdades básicas. La mayoría de ellas son desigualdades numéricas que en general carecen de una interpretación geométrica, sin embargo cuando es posible darla ésta se incluye. Se hace notar la importancia de algunas de ellas, por ejemplo, la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad del reacomodo, la desigualdad de Jensen, la desigualdad de Muirhead, entre otras. Para todas ellas, además de su justificación, se presentan varios ejemplos que muestran cómo utilizarlas en problemas del tipo de olimpiadas de matemáticas. También se hace notar cómo la estrategia de sustitución se utiliza para deducir varias desigualdades.

En el capítulo 2 de desigualdades geométricas, se ejemplifica el uso de las desigualdades numéricas básicas del capítulo 1 para resolver problemas geométricos. Se trabaja también, en esta parte, con desigualdades que tienen un fuerte contenido geométrico, iniciando con hechos básicos como la desigualdad del triángulo y la desigualdad de Euler. Introducimos ejemplos donde el carácter simétrico en las variables ayuda a resolver algunos problemas, se hace también énfasis en cómo los cambios de variable se utilizan para deducir varias de ellas. Resaltamos entre éstos la transformación de Ravi y la correspondencia entre una desiguladad en términos de las longitudes de los lados de un triángulo a, b, c y las desigualdades correspondientes en términos de s, r y R, el semiperímetro, el

inradio y el circunradio del triángulo, respectivamente. Se incluyen también varios problemas geométricos clásicos haciendo hincapié en los métodos utilizados para resolverlos.
En el capítulo 3 se presentan ciento veinte problemas de desigualdades que han aparecido en concursos recientes, cubriendo todos los niveles desde olimpiadas nacionales, regionales hasta competencias internacionales.
En el capítulo 4, se dan las soluciones a cada uno de los doscientos diez ejercicios de los capítulos 1 y 2, así como a los problemas presentados en el capítulo 3. La mayoría de las soluciones de los ejercicios o problemas que han aparecido en competencias internacionales de matemáticas se extrajeron de las soluciones oficiales de cada uno de los concursos. Esta es la razón por la cual no damos créditos individuales por ellas.
Una gran parte de los ejercicios y problemas de desigualdades se pueden resolver utilizando distintas técnicas, es por ello que encontrará algunos ejercicios repetidos, pero en diferentes secciones. Esto le indicará que puede encontrar, con la técnica desarrollada en la sección correspondiente, una manera de resolver el ejercicio utilizando dicha herramienta.
El material presentado en este libro ha sido acumulado durante los últimos quince años, principalmente durante las sesiones de trabajo con estudiantes que han ganado el concurso nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas; estos estudiantes se estaban preparando para las competencias internacionales en las que México participa.
Quisieramos agradecer a Rafael Martínez Enríquez, Leonardo Ignacio Martínez Sandoval, David Mireles Morales, Jesús Rodríguez Viorato y Pablo Soberón Bravo por su cuidadosa revisión del texto y sus valiosos comentarios, lo cual permitió mejorar la presentación del libro.

Radmila Bulajich Manfrino
José Antonio Gómez Ortega
Rogelio Valdez Delgado

Contenido

Capítulo 1

Desigualdades Numéricas

1.1. El orden en los números reales

Los números reales tienen la importante propiedad de poseer un orden. El orden en los números reales nos permitirá comparar dos números y decidir cual de ellos es mayor o bien si son iguales. A fin de evitar justificaciones tediosas, asumiremos que en los números reales hay un conjunto P que llamaremos el conjunto de números positivos, y simbólicamente escribiremos $x > 0$, para decir que un número x está en P. Aceptaremos también las tres propiedades siguientes.

Propiedad 1.1.1 *Cada número real x tiene una y sólo una de las siguientes características:*

(i) $x = 0$.
(ii) $x \in P$ *(esto es $x > 0$).*
(iii) $-x \in P$ *(esto es $-x > 0$).*

Propiedad 1.1.2 *Si x,$y \in P$, entonces $x + y \in P$*
(en símbolos $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$).

Propiedad 1.1.3 *Si x, $y \in P$, entonces $xy \in P$*
(en símbolos $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow xy > 0$).

Si tenemos a la "recta real" como representación geométrica de los números reales, es decir, una recta dirigida donde se ha localizado el cero "0", el cual divide en dos partes a la recta, los números positivos son la parte que contiene al uno "1". Por lo general el 1 está colocado a la derecha de 0 en el sentido que tiene la recta. Hacemos notar que el 1 es positivo, ya que si fuera negativo, como cumple con la propiedad $1 \cdot x = x$ para cada x, tendríamos que cualquier número $x \neq 0$ cumpliría con $x \in P$ y $-x \in P$, lo cual contradice la propiedad 1.1.1.

Ahora podemos definir la relación, a **es mayor que** b, si $a - b \in P$ (en símbolos $a > b$). Análogamente, a **es menor que** b, si $b - a \in P$ (en símbolos $a < b$). Observemos que $a < b$ es equivalente a $b > a$. Definimos también a **es menor o igual que** b, si $a < b$ ó $a = b$, (en símbolos $a \leq b$).
Denotamos a los números reales por $\mathbb{R}$ y al conjunto P de números reales positivos por $\mathbb{R}^+$.

Ejemplo 1.1.4 *(i) Si $a < b$ y c es cualquier número, entonces $a + c < b + c$.*
(ii) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

En efecto, para mostrar (i) tenemos que $a + c < b + c \Leftrightarrow (b + c) - (a + c) > 0 \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$. Para ver (ii), tenemos que: $a < b \Rightarrow b - a > 0$ y como $c > 0$, resulta que $(b - a)c > 0$, luego $bc - ac > 0$ y entonces $ac < bc$.

Ejercicio 1.1 *Dados dos números a y b, una y sólo una de las siguientes afirmaciones se cumple, $a = b$, $a > b$ o $a < b$.*

Ejercicio 1.2 *Muestre las siguientes afirmaciones:*

(i) $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow ab > 0$.
(ii) $a < 0$, $b > 0 \Rightarrow ab < 0$.
(iii) $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$.
(iv) $a < b$, $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
(v) $a < b \Rightarrow -b < -a$.
(vi) $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.
(vii) $a < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < 0$.
$(viii)$ $a > 0$, $b > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} > 0$.
(ix) $0 < a < b$, $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$.
(x) $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$.
(xi) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$.

Ejercicio 1.3 *(i) Si $a > 0$, $b > 0$ y $a^2 < b^2$, entonces $a < b$. (ii) Si $b > 0$, tenemos que $\frac{a}{b} > 1$ si y sólo si $a > b$.*

Para un número real x se define **el valor absoluto**, el cual se denota por $|x|$, como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ -x & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ es la distancia del número x (en la recta real) al origen 0. Tambien, $|a - b|$ es **la distancia entre los números reales** a **y** b en la recta real.

Ejercicio 1.4 *Para cualesquiera números reales x, a y b, se tiene que:*

(i) $|x| \geq 0$, y es igual a cero solamente cuando $x = 0$.
(ii) $|-x| = |x|$.
(iii) $|x|^2 = x^2$.
(iv) $|ab| = |a|\,|b|$.
(v) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, con $b \neq 0$.

Proposición 1.1.5 (Desigualdad del triángulo) *Para dos números reales a y b, siempre se tiene que*

$$|a + b| \leq |a| + |b|\,.$$

Además la igualdad ocurre solamente cuando $ab \geq 0$.

Demostración. Como ambos lados de la desigualdad son números positivos; por el ejercicio 1.3 bastará entonces verificar que $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$.

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2\,|ab| + |b|^2 \\ &= |a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2\,. \end{aligned}$$

En las relaciones anteriores hay una sola desigualdad y ésta es inmediata ya que $ab \leq |ab|$. Notemos que cuando $ab \geq 0$ se tiene que $ab = |ab| = |a|\,|b|$, y entonces se da la igualdad.

La **forma general de la desigualdad del triángulo**, para números reales x_1, x_2, ... , x_n, es

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

La igualdad se tiene cuando todos los x_i tienen el mismo signo. Esta se demuestra de manera similar, o bien por inducción. Otra versión de la desigualdad anterior que su usa muy a menudo es

$$|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Ejercicio 1.5 *Sean x, y, a, b números reales muestre que:*

(i) $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$.
(ii) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
(iii) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.
(iv) $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 > 0$.

Ejercicio 1.6 *Para números reales a, b, c muestre que*

$$|a| + |b| + |c| - |a + b| - |b + c| - |c + a| + |a + b + c| \geq 0.$$

Ejercicio 1.7 *Sean a, b números reales con $0 \leq a \leq b \leq 1$, muestre que:*

(i) $0 \leq \dfrac{b - a}{1 - ab} \leq 1$,

(ii) $0 \leq \dfrac{a}{1 + b} + \dfrac{b}{1 + a} \leq 1$,

(iii) $0 \leq ab^2 - ba^2 \leq \dfrac{1}{4}$.

Ejercicio 1.8 *Muestre que si n, m son números enteros positivos, entonces $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ si y sólo si $\sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n}$.*

Ejercicio 1.9 *Si $a \geq b$, $x \geq y$, entonces $ax + by \geq ay + bx$.*

Ejercicio 1.10 *Si x, $y > 0$, entonces $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.*

Ejercicio 1.11 *(Repúblicas Checa y Eslovaca, 2004) Sean a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ con $a + d = b + c$, muestre que*

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geq 0.$$

Ejercicio 1.12 *Sea* $f(a, b, c, d) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2$. *Para* $a < b < c < d$, *muestre que*

$$f(a, c, b, d) > f(a, b, c, d) > f(a, b, d, c).$$

Ejercicio 1.13 *(IMO, 1960) ¿Para qué valores de* x *se cumple la desigualdad*

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9?$$

Ejercicio 1.14 *Muestre que para cualquier entero positivo, la parte fraccionaria de* $\sqrt{4n^2 + n}$ *es menor que* $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 1.15 *(Lista corta IMO, 1996). Sean* a, b, c *números positivos que satisfacen* $abc = 1$, *muestre que*

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

1.2. La función cuadrática $ax^2 + 2bx + c$.

Una desigualdad muy útil en los números reales es $x^2 \geq 0$, la cual es válida para cualquier número real x (basta ver las propiedades 1.1.1 y 1.1.3 y el ejercicio 1.2 de la sección anterior). De ésta se deducen muchas otras desigualdades, en particular la usaremos para maximizar o minimizar una función cuadrática $ax^2+2bx+c$. Estas funciones cuadráticas aparecen con frecuencia en problemas de optimización o en desigualdades.
Un ejemplo común consiste en probar que si $a > 0$, la función cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tendrá un mínimo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor mínimo es $c - \frac{b^2}{a}$. En efecto,

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}\right) + c - \frac{b^2}{a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}, \end{aligned}$$

como $\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ y como el valor mínimo de esta última expresión es cero cuando $x=-\frac{b}{a}$, tenemos que el valor mínimo de la cuadrática es $c-\frac{b^2}{a}$.
Si $a<0$, la función cuadrática $ax^2+2bx+c$, tendrá un máximo en $x=-\frac{b}{a}$ y su valor ahí es $c-\frac{b^2}{a}$. En efecto, como $ax^2+2bx+c=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}$ y puesto que $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 \leq 0$ (ya que $a<0$), el valor más grande de esta última expresión es cero, luego la función cuadrática siempre es menor o igual a $c-\frac{b^2}{a}$ y toma ese valor en $x=-\frac{b}{a}$.

Ejemplo 1.2.1 *Si x, y son números positivos con $x+y=2a$, el producto xy es máximo cuando $x=y=a$.*

Si $x+y=2a$, entonces $y=2a-x$. Por lo que, $xy=x(2a-x)=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$ tiene un valor máximo cuando $x=a$ y entonces $y=x=a$.
Esto se puede interpretar geométricamente como: *"de los rectángulos de perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado"*. Ya que si x, y son los lados del rectángulo, el perímetro es $2(x+y)=4a$ y su área es xy, que es máxima cuando $x=y=a$.

Ejemplo 1.2.2 *Si x, y son números positivos con $xy=1$, la suma $x+y$ es mínima cuando $x=y=1$.*

Si $xy=1$, entonces $y=\frac{1}{x}$. Así, $x+y=x+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2$, luego, $x+y$ es mínimo cuando $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, esto es, cuando $x=1$. Por lo tanto, $x=y=1$.
También podemos interpretar geométricamente esto de la siguiente forma, *"de los rectángulos de área 1, el cuadrado es el de menor perímetro"*. En efecto, si x, y son los lados del rectángulo, tenemos que su área es $xy=1$ y su perímetro es $2(x+y)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2\left\{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\right\} \geq 4$. Además, el perímetro es 4 si y sólo si $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, esto es, cuando $x=y=1$.

Ejemplo 1.2.3 *Para cualquier número positivo x, se tiene que $x+\frac{1}{x} \geq 2$.*

Basta observar que $x+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2 \geq 2$. Además, la igualdad se logra si y sólo si $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, esto es cuando $x=1$.

Ejemplo 1.2.4 *Si a, $b>0$ entonces $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, y la igualdad se da si y sólo si $a=b$.*

Basta aplicar el ejemplo anterior con $x = \frac{a}{b}$.

Ejemplo 1.2.5 *Dados a, b, $c > 0$, se puede construir un triángulo con lados de longitud a, b y c si y sólo si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$, para cualesquiera p, q con $p + q = 1$.*

Recordemos que a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo si y sólo si $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.
Sea $Q = pa^2 + qb^2 - pqc^2 = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2$. Q es una función cuadrática[1] de p y

$$\begin{aligned} Q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad & \triangle = \left[\left(a^2 - b^2 - c^2\right)^2 - 4b^2c^2\right] < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & [a + b + c]\,[a - b - c]\,[a - b + c]\,[a + b - c] < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & [b + c - a][c + a - b][a + b - c] > 0. \end{aligned}$$

Ahora $[b + c - a][c + a - b][a + b - c] > 0$, si los tres factores son positivos o si uno es positivo y dos de ellos negativos. Esto último es imposible, pues si por ejemplo, $[b+c-a] < 0$ y $[c+a-b] < 0$, tendríamos al sumar estas desigualdades que $c < 0$, lo cual es falso. Así los tres factores son necesariamente positivos.

Ejercicio 1.16 *Supongamos que el polinomio $ax^2 + bx + c$ satisface que: $a > 0$, $a + b + c \geq 0$, $a - b + c \geq 0$, $a - c \geq 0$ y $b^2 - 4ac \geq 0$. Muestre que sus raíces son reales y se encuentran en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.*

Ejercicio 1.17 *Si a, b, c son números positivos, entonces no suceden simultáneamente las desigualdades $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$, $c(1-a) > \frac{1}{4}$.*

1.3. Una desigualdad fundamental, media geométrica-media aritmética

La primera desigualdad que consideramos fundamental en los problemas de optimización, es la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética

[1]Una función cuadrática $ax^2 + bx + c$ con $a > 0$, es positiva cuando su discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es negativo. En efecto, esto se sigue de que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$. Recuerde que las raíces son $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, y son reales cuando $\Delta \geq 0$, en caso contrario no hay raíces reales, por lo que $ax^2 + bx + c$ toma un mismo signo, esta expresión será positiva si $a > 0$.

de dos números no negativos a y b, que está dada por

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}. \qquad (MG-MA)$$

Además la igualdad ocurre si y sólo si $a = b$.
Los números $\sqrt{ab}$ y $\frac{a+b}{2}$ se conocen como la **media geométrica** y la **media aritmética** de a y b, respectivamente. Para demostrar la desigualdad basta observar que,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$$

Desde luego la igualdad se logra si y sólo si $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, es decir, cuando $a = b$.

Ejercicio 1.18 *Para* $x \geq 0$, $1 + x \geq 2\sqrt{x}$.

Ejercicio 1.19 *Para* $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Ejercicio 1.20 *Para* $x, y \in \mathbb{R}^+$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Ejercicio 1.21 *Para* $x, y \in \mathbb{R}^+$, $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$.

Ejercicio 1.22 *Para* $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

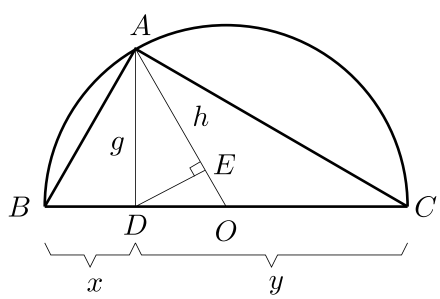
Ejercicio 1.23 *Para* $a, b, x \in \mathbb{R}^+$, $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$.

Ejercicio 1.24 *Para* $a, b > 0$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Ejercicio 1.25 *Para* $0 < b \leq a$, $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$.

Presentamos ahora una demostración geométrica y visual de las siguientes desigualdades, para $x, y > 0$,

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}. \tag{1.1}$$



Construyamos una semicircunferencia de diámetro $BC = x+y$ y sean $x = BD$, $y = DC$. Sea A el punto donde la perpendicular a BC por D intersecta a la semicircunferencia y sea E el pie de la perpendicular desde D al radio AO. Denotemos por $g = AD$, $h = AE$. Por ser ABD y CAD triángulos rectángulos semejantes, tenemos que

$$\frac{g}{y} = \frac{x}{g}, \qquad \text{luego} \qquad g = \sqrt{xy}.$$

También, por ser AOD y ADE triángulos rectángulos semejantes, tenemos

$$\frac{h}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}}, \qquad \text{luego} \qquad h = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}.$$

Finalmente, la geometría nos dice que en un triángulo rectángulo un cateto siempre es menor que la hipotenusa. Por lo que, $h \leq g \leq \frac{x+y}{2}$, que reescribimos como

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

El número $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ se conoce como la **media armónica** de x y y. La desigualdad de la izquierda en la ecuación (1.1) se conoce como la **desigualdad entre la media armónica y la media geométrica**.

Algunas desigualdades se pueden demostrar a través de repetir la aplicación de una desigualdad sencilla, además del uso de una buena idea para dividir el problema, esto se puede ver resolviendo los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.26 *Para* x, y, $z \in \mathbb{R}^+$, $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

Ejercicio 1.27 *Para* x, y, $z \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Ejercicio 1.28 *Para* x, y, $z \in \mathbb{R}^+$, $xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$.

Ejercicio 1.29 *Para* x, $y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Ejercicio 1.30 *Para* x, y, $z \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$.

Ejercicio 1.31 *Para* x, y, $z \in \mathbb{R}^+$, $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$.

Ejercicio 1.32 *Para* x, y, $z \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$.

La desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética se puede extender para más números. Por ejemplo, podemos ver la siguiente desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para cuatro números no negativos a, b, c, d, que afirma que $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)\\ &\geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.\end{aligned}$$

Observemos que usamos tres veces la desigualdad $MG-MA$ para dos números, en cada caso: con a y b, con c y d, y con $\sqrt{ab}$ y $\sqrt{cd}$. Más aún, la igualdad se da si y sólo si $a = b$, $c = d$ y $ab = cd$, esto es cuando los números satisfacen $a = b = c = d$.

Ejercicio 1.33 *Para* $x,\, y \in \mathbb{R}$, $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

Ejercicio 1.34 *Para* $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}^+$, $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$.

Ejercicio 1.35 *Para* $a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}^+$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$.

Hay un muy buen truco para ver que la desigualdad también es verdadera para tres números no negativos a, b y c, esto es, que $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$. Considere los siguientes cuatro números a, b, c y $d = \sqrt[3]{abc}$. Como la desigualdad es verdadera para cuatro números, tenemos $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{d^3 d} = d$. Luego, $\frac{a+b+c}{4} \geq d - \frac{1}{4}d = \frac{3}{4}d$, por lo que, $\frac{a+b+c}{3} \geq d = \sqrt[3]{abc}$.

Estas ideas se pueden usar para justificar la versión general de la desigualdad para n números no negativos. Si a_1, a_2, ... , a_n son n números no negativos, tomamos los números A y G definidos como

$$A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \quad \text{y} \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Estos números se conocen como la **media aritmética** y la **media geométrica** de los números a_1, a_2, ... , a_n, respectivamente.

Teorema 1.3.1 (Desigualdad entre las medias geométrica y aritmética)

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Primera demostración. (de Cauchy)
Llamemos P_n a la afirmación $G \leq A$, para n números. La demostración la haremos por inducción sobre n, pero una inducción del siguiente tipo:

(1) Se muestra que la afirmación vale para 2 números, esto es que P_2 es cierta.

(2) Se muestra que la afirmación: $P_n \Rightarrow P_{n-1}$.

(3) Se muestra que la afirmación: $P_n \Rightarrow P_{2n}$.

Cuando es válido (1), (2) y (3), todas las afirmaciones P_n con $n \geq 2$ son verdaderas. Demostramos ahora estas afirmaciones:

(1) Este apartado lo hemos hecho en la primera parte.

(2) Sean a_1, a_2, ... , a_n números no negativos y sea $g = \sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}}$. Con este número agregado a los números a_1, ... , a_{n-1} obtenemos n números a los que aplicamos P_n,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + g}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} g} = \sqrt[n]{g^{n-1} \cdot g} = g.$$

Luego, $a_1 + \cdots + a_{n-1} + g \geq ng$ y entonces se sigue que $\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq g$, por lo que P_{n-1} es verdadera.

(3) Sean a_1, a_2, ... , a_{2n} números no negativos, entonces

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &\geq 2\left(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}\right) \\ &\geq 2n\left(\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4} \cdots \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 2n\left(a_1 a_2 \cdots a_{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}. \end{aligned}$$

Hemos aplicado primero varias veces la afirmación P_2 que sabemos es cierta y después la afirmación P_n a los números $\sqrt{a_1 a_2}$, $\sqrt{a_3 a_4}$, ... , $\sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}$.

Segunda demostración. Sea $A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. Tomemos dos de los números a_i, uno menor que A y otro mayor que A, si es que existen. Sin pérdida de generalidad, supongamos que son $a_1 = A - h$ y $a_2 = A + k$ con h, $k > 0$. Cambiaremos a_1 y a_2 por otros dos números que incrementen el producto y que dejen fija la suma, definimos

$$a_1' = A,\ a_2' = A + k - h.$$

Como $a_1' + a_2' = A + A + k - h = A - h + A + k = a_1 + a_2$, es claro que, $a_1' + a_2' + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, pero $a_1' a_2' = A(A + k - h) = A^2 + A(k - h)$ y $a_1 a_2 = (A + k)(A - h) = A^2 + A(k - h) - hk$, luego, $a_1' a_2' > a_1 a_2$ y entonces $a_1' a_2' a_3 \cdots a_n > a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$.

Si $A = a'_1 = a'_2 = a_3 = \cdots = a_n$, ya no hay nada que demostrar (se da la igualdad), en caso contrario hay dos elementos, uno mayor que A y otro menor que A, y repetimos el argumento. Como cada vez que realizamos esta operación se crea un número igual a A, el proceso no puede ir más allá de n pasos.

Ejemplo 1.3.2 *Encuentre el valor máximo de $x(1-x^3)$ para $0 \leq x \leq 1$.*

La idea de la prueba es transformar el producto en uno cuya suma sea constante. Si $y = x(1-x^3)$, es claro que el lado derecho de $3y^3 = 3x^3(1-x^3)(1-x^3)(1-x^3)$, visto como el producto de cuatro números $3x^3$, $(1-x^3)$, $(1-x^3)$ y $(1-x^3)$, tiene suma constante igual a 3. La desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética para los cuatro números nos garantiza que

$$3y^3 \leq \left(\frac{3x^3 + 3(1-x^3)}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4,$$

luego, $y \leq \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$. Además, el valor máximo se alcanza cuando $3x^3 = 1 - x^3$, esto es, si $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Ejercicio 1.36 *Sean $x_i > 0$, $i = 1, ..., n$. Muestre que*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Ejercicio 1.37 *Si $\{a_1, ..., a_n\}$ es una permutación de $\{b_1, ..., b_n\} \subset \mathbb{R}^+$, entonces*

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n \quad \text{y} \quad \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geq n.$$

Ejercicio 1.38 *Si $a > 1$, entonces $a^n - 1 > n\left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right)$.*

Ejercicio 1.39 *Si a, b, $c > 0$ y $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$, entonces $abc \leq 1$.*

Ejercicio 1.40 *Si a, b, $c > 0$ entonces $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.*

Ejercicio 1.41 *Si a, b, $c \geq 0$, entonces*

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

Ejercicio 1.42 *Si a, b, $c > 0$, entonces*

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Ejercicio 1.43 *Sean a, b, $c > 0$ tales que $abc = 1$. Muestre que*

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ac}{1+c} \geq 3.$$

Ejercicio 1.44 *Si a, b, $c > 0$, muestre que*

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Ejercicio 1.45 *Si $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, muestre que*

$$n(n+1)^{\frac{1}{n}} < n + H_n, \quad \textit{para} \quad n \geq 2.$$

Ejercicio 1.46 *Si x_1, x_2, ... , $x_n > 0$, son tales que $\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n} = 1$. Muestre que*

$$x_1x_2\cdots x_n \geq (n-1)^n .$$

Ejercicio 1.47 *(Lista corta IMO, 1998) Sean a_1, a_2, ... , a_n números positivos con $a_1+a_2+\cdots+a_n < 1$, muestre que*

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n\left[1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

Ejercicio 1.48 *Sean a_1, a_2, ... , a_n números positivos, tales que $\frac{1}{1+a_1}+\cdots+\frac{1}{1+a_n} = 1$. Muestre que*

$$\sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Ejercicio 1.49 *(APMO, 1991) Sean a_1, a_2, ... , a_n, b_1, b_2, ... , b_n números positivos, tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Muestre que*

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + \cdots + a_n).$$

Ejercicio 1.50 *Sean a, b, c números positivos, muestre que*

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Ejercicio 1.51 *Sean a, b, c números positivos con $a + b + c = 1$, muestre que*

$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 64.$$

Ejercicio 1.52 *Sean a, b, c números positivos con $a + b + c = 1$, muestre que*

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8.$$

Ejercicio 1.53 *(Repúblicas Checa y Eslovaca, 2005). Sean a, b, c números positivos que satisfacen $abc = 1$, muestre que*

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 1.54 *Sean a, b, c números positivos que satisfacen $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$, muestre que*

$$abc \geq 8.$$

Ejercicio 1.55 *Sean a, b, c números positivos, muestre que*

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq a + b + c.$$

Ejercicio 1.56 *Sean a_1, a_2, ... , a_n, b_1, b_2, ... , b_n números positivos, muestre que*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i b_i} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \geq 4n^2.$$

Ejercicio 1.57 *(Rusia, 1991) Sean x, y, z números reales no negativos, muestre que*

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

Ejercicio 1.58 *(Rusia, 1992) Para números reales positivos x, y, z, muestre que*

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$$

Ejercicio 1.59 *(Rusia, 1992) Muestre que para cualesquiera números reales x, $y > 1$, se tiene*

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8.$$

1.4. Una desigualdad maravillosa, la desigualdad del reacomodo

Considere dos colecciones de números reales ordenados en forma creciente,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad \text{y} \quad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

Para cualquier permutación $(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ de $(a_1, a_2, ..., a_n)$, se tiene que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n &(1.2)\\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n &(1.3) \end{aligned}$$

Además, la igualdad en (1.2) es cierta si y sólo si $(a'_1, a'_2, ..., a'_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Y la igualdad en (1.3) es cierta si y sólo si $(a'_1, a'_2, ..., a'_n) = (a_n, a_{n-1}, ..., a_1)$. A la desigualdad (1.2) se le conoce como la **desigualdad del reacomodo**.

Corolario 1.4.1 *Para cualquier permutación* $(a_1', a_2', ..., a_n')$ *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$, *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_1' + a_2 a_2' + \cdots + a_n a_n'.$$

Corolario 1.4.2 *Para cualquier permutación* $(a_1', a_2', ..., a_n')$ *de* $(a_1, a_2, ..., a_n)$, *se tiene que*

$$\frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \cdots + \frac{a_n'}{a_n} \geq n.$$

Demostración (de la desigualdad del reacomodo)
Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Sean

$$\begin{array}{rcl} S & = & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n \qquad \text{y} \\ S' & = & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n. \end{array}$$

La diferencia entre S y S' es que los coeficientes de b_r y b_s, donde $r < s$, están intercambiados. Por lo tanto,

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Entonces podemos afirmar que $S \geq S'$ si y sólo si $a_s \geq a_r$. Repitiendo este proceso tenemos que la suma S es la mayor cuando $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.

Ejemplo 1.4.3 *(IMO, 1975) Considere dos colecciones de números* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ *y una permutación* $(z_1, z_2, ..., z_n)$ *de* $(y_1, y_2, ..., y_n)$. *Muestre que*

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2.$$

Elevando al cuadrado y reacomodando la desigualdad anterior, tenemos que es equivalente a

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

pero como $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$, entonces la desigualdad que tenemos que probar es equivalente a demostrar

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

que es la desigualdad (1.2) del teorema.

Ejemplo 1.4.4 *(IMO, 1978) Sean x_1, x_2, ... , x_n enteros positivos distintos, muestre que*

$$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2}\geq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Sea $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ una permutación de $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ con $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ y sea $(b_1,b_2,\ldots,b_n)=\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{(n-1)^2},\cdots,\frac{1}{1^2}\right)$, esto es $b_i=\frac{1}{(n+1-i)^2}$ para los índices $i=1,\ldots,n$.

Considere la permutación $(a_1',a_2',\ldots,a_n')$ de $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ definida por $a_i'=x_{n+1-i}$, para $i=1,\ldots,n$.

Utilizando la desigualdad (1.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2} &= a_1'b_1+a_2'b_2+\cdots+a_n'b_n\\
&\geq a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n\\
&= a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\\
&= \frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Como $1\leq a_1$, $2\leq a_2$, ... , $n\leq a_n$, tenemos que

$$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2}\geq\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geq\frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Ejemplo 1.4.5 *(IMO, 1964) Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Muestre que*

$$a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(a+c-b\right)+c^2\left(a+b-c\right)\leq 3abc.$$

Como la expresión es una función simétrica en a, b y c, podemos suponer sin perder generalidad que $c\leq b\leq a$. En tal caso, $a\left(b+c-a\right)\leq b\left(a+c-b\right)\leq c\left(a+b-c\right)$.

Por ejemplo, la primera desigualdad se justifica como sigue

$$\begin{aligned}
a\left(b+c-a\right)\leq b\left(a+c-b\right) &\Leftrightarrow ab+ac-a^2\leq ab+bc-b^2\\
&\Leftrightarrow \left(a-b\right)c\leq\left(a+b\right)\left(a-b\right)\\
&\Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a+b-c\right)\geq 0.
\end{aligned}$$

Por la ecuación (1.3) de la desigualdad del reacomodo, tenemos que

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c)$

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c).$

Por lo tanto, $2\left[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right]\leq 6abc.$

Ejemplo 1.4.6 *(IMO, 1983) Sean a, b, c los lados de un triángulo, muestre que*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a\,(c-a)\geq 0.$$

Consideremos el caso $c\leq b\leq a$, (los otros casos se desarrollan de manera similar).
Como en el ejemplo anterior, tenemos que $a(b+c-a)\leq b(a+c-b)\leq c(a+b-c)$ y como además $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$, por la desigualdad (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}a(b+c-a)+\frac{1}{b}b(c+a-b)+&\frac{1}{c}c(a+b-c)\geq\\ &\geq\frac{1}{c}a(b+c-a)+\frac{1}{a}b(c+a-b)+\frac{1}{b}c(a+b-c).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\quad a+b+c\geq\dfrac{a\,(b-a)}{c}+\dfrac{b(c-b)}{a}+\dfrac{c\,(a-c)}{b}+a+b+c.$

De donde tenemos que $\dfrac{a(b-a)}{c}+\dfrac{b(c-b)}{a}+\dfrac{c(a-c)}{b}\leq 0$. Multiplicando por abc, obtenemos

$$a^2b\,(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Ejemplo 1.4.7 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Para cualesquiera números reales x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, la siguiente desigualdad se cumple*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

La igualdad se da si y sólo si existe una $\lambda\in\mathbb{R}$ con $x_i=\lambda y_i$, para cada $i=1,2,...,n$.

Si $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ o $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ el resultado es evidente. De lo contrario, sean $S=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ y $T=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$, claramente $S\neq 0$ y $T\neq 0$. Definamos $a_i=\frac{x_i}{S}$ y $a_{n+i}=\frac{y_i}{T}$, para $i=1,2,...,n$. Usando el corolario 1.4.1,

$$\begin{aligned}2 &= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{S^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{T^2}=\sum_{i=1}^{2n}a_i^2\\ &\geq a_1a_{n+1}+a_2a_{n+2}+\cdots+a_na_{2n}+a_{n+1}a_1+\cdots+a_{2n}a_n\\ &= 2\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{ST}.\end{aligned}$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a_i = a_{n+i}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, y esto es cierto si y sólo si $x_i = \frac{S}{T} y_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.
Podemos dar otra demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz utilizando la identidad de Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

La importancia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz será evidente a lo largo del libro. Como veremos, es una herramienta útil para resolver un gran número de ejercicios y problemas.

Ejemplo 1.4.8 (Desigualdad de Nesbitt) *Para a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, se tiene que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que $a \leq b \leq c$, de esta hipótesis se sigue que $a+b \leq c+a \leq b+c$ y $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$.

Usando la desigualdad del reacomodo (1.2) dos veces, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \left(\frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b}\right) = 3.$

Otra forma, de demostrar la desigualdad es usando la desigualdad (1.3) dos veces,

$$\begin{aligned}\frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} &\geq 3 \\ \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} &\geq 3.\end{aligned}$$

Luego, al sumar las dos expresiones obtenemos $\frac{2a+b+c}{b+c} + \frac{2b+c+a}{c+a} + \frac{2c+a+b}{a+b} \geq 6$, y entonces

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3.$$

Ejemplo 1.4.9 *(IMO, 1995) Sean a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, con $abc = 1$. Muestre que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Sin perder generalidad podemos suponer $c \leq b \leq a$. Sean $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ y $z = \frac{1}{c}$, entonces

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \\ &= \frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{y^3}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} + \frac{z^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \\ &= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}. \end{aligned}$$

Como $x \leq y \leq z$, tenemos que $x+y \leq z+x \leq y+z$ y también que $\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{z+x} \leq \frac{z}{x+y}$. Por la desigualdad del reacomodo (1.2), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{x+y} \\ \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{xz}{z+x} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zy}{x+y}, \end{aligned}$$

que a su vez nos lleva a $2S \geq x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$. Por lo tanto, $S \geq \frac{3}{2}$.

Ejemplo 1.4.10 *(APMO, 1998) Sean a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, muestre que*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} & \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \\ \Leftrightarrow\quad & 1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{abc}{abc} \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}. \end{aligned}$$

Definiendo $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Tenemos ahora que mostrar que

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{x^3}{z^3} + \frac{z^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} \geq \frac{2\left(x^3 + y^3 + z^3\right)}{xyz}.$$

Pero, si consideramos $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)$, $(a_1', a_2', a_3', a_4', a_5', a_6') = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}, \frac{z}{y}, \frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$ y $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) =$ $= \left(\frac{x^2}{y^2}, \frac{y^2}{z^2}, \frac{z^2}{x^2}, \frac{x^2}{z^2}, \frac{z^2}{y^2}, \frac{y^2}{x^2}\right)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{x^3}{z^3} + \frac{z^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} &\geq \frac{x^2}{y^2}\frac{y}{z} + \frac{y^2}{z^2}\frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2}\frac{x}{y} + \frac{x^2}{z^2}\frac{z}{y} + \frac{z^2}{y^2}\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\frac{x}{z} \\ &= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{x^2}{zy} + \frac{z^2}{yx} + \frac{y^2}{xz} \\ &= \frac{2\left(x^3 + y^3 + z^3\right)}{xyz}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.11 (Desigualdad de Tchebyshev) *Sean* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *y* $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$*, entonces*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

Aplicando varias veces la desigualdad del reacomodo obtenemos

$$\begin{array}{rcl} a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & = & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\ a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}, \end{array}$$

al sumar todas las expresiones, obtenemos

$$n\left(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n\right) \geq \left(a_1 + \cdots + a_n\right)\left(b_1 + \cdots + b_n\right).$$

Notemos que la igualdad ocurre solamente cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ o $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Ejercicio 1.60 *Cualesquiera tres números reales positivos* a, b *y* c *cumplen que*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Ejercicio 1.61 *Cualesquiera tres números reales positivos a, b y c, con $abc = 1$, satisfacen que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + (ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Ejercicio 1.62 *Cualesquiera tres números reales positivos a, b y c cumplen que*

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Ejercicio 1.63 *Cualesquiera tres números reales positivos a, b y c cumplen que*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ejercicio 1.64 *Si a, b y c son la longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Ejercicio 1.65 *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ y $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, entonces*

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Ejercicio 1.66 *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ y $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, entonces*

$$\frac{s}{s-a_1} + \frac{s}{s-a_2} + \cdots + \frac{s}{s-a_n} \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

Ejercicio 1.67 *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ y $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, entonces*

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Ejercicio 1.68 (Desigualdad media cuadrática-media aritmética) *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Ejercicio 1.69 *Para números reales positivos a, b, c, que satisfacen $a+b+c=1$, muestre que*

$$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 1.70 (Media armónica, geométrica y aritmética) *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, muestre que*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Donde las igualdades se dan si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Ejercicio 1.71 *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números positivos con $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Muestre que*

$$a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_n^{n-1} \geq \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}.$$

Ejercicio 1.72 *(China, 1989) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números positivos, tales que $a_1+a_2+\cdots+a_n = 1$. Muestre que*

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}(\sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n}).$$

Ejercicio 1.73 *Sean a, b y c números positivos tales que $a+b+c=1$. Muestre que:*

(i) $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} < 5,$

(ii) $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$

Ejercicio 1.74 *Sean a, b, c, $d \in \mathbb{R}^+$, con $ab + bc + cd + da = 1$, muestre que*

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 1.75 *Sean a, b, c números positivos, con $abc = 1$, muestre que*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

Ejercicio 1.76 *Sean x_1, x_2, ... , x_n $(n > 2)$ números reales tales que la suma de cualesquiera $n-1$ de ellos es mayor que el elemento que quedo fuera de la suma. Sea $s = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Muestre que*

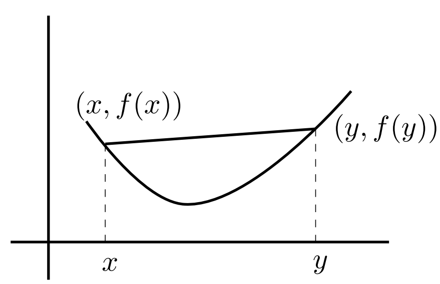
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{s - 2x_k} \geq \frac{s}{n-2}.$$

1.5. Funciones convexas

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **convexa** en el intervalo $I = [a, b]$, si para cada $t \in [0, 1]$ y para $a \leq x < y \leq b$, se tiene la desigualdad

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x). \tag{1.4}$$

Geométricamente, la desigualdad anterior se interpreta diciendo que la gráfica de f entre x y y queda por debajo del segmento que une a los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.



En efecto, la ecuación de la recta que pasa por $(x, f(x))$y $(y, f(y))$ es

$$L(s) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(s - x).$$

Luego, al evaluar en $s = ty + (1-t)x$, obtenemos que

$$\begin{aligned} L(ty + (1-t)x) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t(y - x)) = f(x) + t(f(y) - f(x)) \\ &= tf(y) + (1-t)f(x). \end{aligned}$$

Por lo que, la desigualdad (1.4) es equivalente a

$$f(ty + (1-t)x) \leq L(ty + (1-t)x).$$

Proposición 1.5.1 *(1) Si f es convexa en el intervalo $[a, b]$, entonces es convexa en cualquier subintervalo $[x, y] \subset [a, b]$.*
(2) Si f es convexa en $[a, b]$, entonces, para cualesquiera x, $y \in [a, b]$, se tiene

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)). \tag{1.5}$$

(3) **(Desigualdad de Jensen)** *Si f es convexa en $[a, b]$, entonces para cualesquiera t_1, ... , $t_n \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ y para x_1, ... , $x_n \in [a, b]$, se tiene*

$$f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n).$$

(4) En particular, para x_1, ... , $x_n \in [a, b]$, podemos afirmar que

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right).$$

Demostración. (1) Se deja como ejercicio al lector.

(2) Basta tomar $t = \frac{1}{2}$ en la ecuación (1.4).

(3) $f\left(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n\right) = f((1 - t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n} x_1 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} x_{n-1}\right) + t_n x_n)$
$\leq (1 - t_n) f\left(\frac{t_1}{1-t_n} x_1 + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} x_{n-1}\right) + t_n f(x_n)$, por convexidad
$\leq (1 - t_n)\left\{\frac{t_1}{1-t_n} f(x_1) + \cdots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n} f(x_{n-1})\right\} + t_n f(x_n)$, por inducción
$= t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n)$.

(4) Solamente tenemos que aplicar (3) con $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$.

Observaciones 1.5.2 (i) *Podemos ver que (4) es válida bajo la única suposición de que f satisfaga la relación $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para cualesquiera x, $y \in [a,b]$.*
(ii) *Podemos ver que (3) es válida para $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ números racionales, bajo la única condición de que f satisfaga la relación $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ para cualesquiera x, $y \in [a,b]$.*

La demostración de (i), la haremos por inducción. Llamemos P_n a la afirmación

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right),$$

para $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$. Es claro que son válidas las afirmaciones P_1 y P_2.
Ahora, mostremos que $P_n \Rightarrow P_{n-1}$.
Sean $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ y sea $y = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$. Entonces, por ser cierto P_n, tenemos

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + y}{n}\right) \leq \frac{1}{n}f\left(x_1\right) + \cdots + \frac{1}{n}f(x_{n-1}) + \frac{1}{n}f(y).$$

Pero el lado izquierdo es $f(y)$, por lo que $n \cdot f(y) \leq f\left(x_1\right) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(y)$, luego

$$f(y) \leq \frac{1}{n-1}\left(f\left(x_1\right) + \cdots + f(x_{n-1})\right).$$

Finalmente veamos que $P_n \Rightarrow P_{2n}$.

Sea $D = f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right)$, donde $u = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ y $v = \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}$.

Como $f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(u) + f(v))$, tenemos que

$$\begin{aligned} D &\leq \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) + f\left(\frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2n}\left(f\left(x_1\right) + \cdots + f(x_n) + f(x_{n+1}) + \cdots + f(x_{2n})\right), \end{aligned}$$

donde hemos usado dos veces la afirmación P_n.

Para demostrar (ii), nuestro punto de partida será considerar la afirmación $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n))$, para $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$.
Sean $t_1 = \frac{r_1}{s_1}, \ldots, t_n = \frac{r_n}{s_n}$, números racionales en $[0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Si m es el mínimo común múltiplo de las s_i, entonces $t_i = \frac{p_i}{m}$ con $p_i \in \mathbb{N}$ y

$\sum_{i=1}^{n} p_i = m$, luego

$$\begin{aligned}
f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) &= f\left(\frac{p_1}{m}x_1 + \cdots + \frac{p_n}{m}x_n\right) \\
&= f\left(\frac{1}{m}\left[\underbrace{(x_1 + \cdots + x_1)}_{p_1-\text{términos}} + \cdots + \underbrace{(x_n + \cdots + x_n)}_{p_n-\text{términos}}\right]\right) \\
&\leq \frac{1}{m}\left[\underbrace{(f(x_1) + \cdots + f(x_1))}_{p_1-\text{términos}} + \cdots + \underbrace{(f(x_n) + \cdots + f(x_n))}_{p_n-\text{términos}}\right] \\
&= \frac{p_1}{m}f(x_1) + \cdots + \frac{p_n}{m}f(x_n) \\
&= t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).
\end{aligned}$$

Observación 1.5.3 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua*[2] *en $[a,b]$ y cumple el inciso (2) de la proposición, entonces f es convexa.*

Hemos visto que si f cumple (2), entonces

$$f(qx + (1-q)y) \leq qf(x) + (1-q)f(y),$$

para cualesquiera x, $y \in [a,b]$ y $q \in [0,1]$ un número racional. Como cualquier real t se puede aproximar por una sucesión de números racionales q_n, tenemos que si estos q_n están en $[0,1]$, entonces

$$f(q_nx + (1-q_n)y) \leq q_nf(x) + (1-q_n)f(y).$$

Ahora bien, la continuidad de f nos garantiza que al tomar el límite obtenemos

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Decimos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es **cóncava** si $-f$ es convexa.

Observación 1.5.4 *Una función $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ es cóncava en $[a,b]$ si y sólo si $f(ty + (1-t)x) \geq tf(y) + (1-t)f(x)$, para $0 \leq t \leq 1$ y $a \leq x < y \leq b$.*

Veamos ahora algunos criterios para decidir si una función es convexa.

[2]Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $c \in [a,b]$ si $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, y f es continua en $[a,b]$ si es continua para todo punto en el intervalo. Equivalentemente, f es continua en c, si para toda sucesión de puntos $\{c_n\}$ que converge a c, la sucesión $\{f(c_n)\}$ converge a $f(c)$.

Criterio 1.5.5 *Una función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es convexa si y sólo si el conjunto* $\{(x,y) \,|\, a \leq x \leq b, f(x) \leq y\}$ *es convexo*[3].

Demostración. Supongamos que f es convexa y, sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos del conjunto $U = \{(x,y) \,|\, a \leq x \leq b, f(x) \leq y\}$. Para mostrar que $tB + (1-t)A = (tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1)$ pertenece a U, bastará ver que $a \leq tx_2 + (1-t)x_1 \leq b$ y $f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq ty_2 + (1-t)y_1$. La primera condición es inmediata de que tanto x_1 como x_2 pertenecen a $[a,b]$. Para la segunda condición, como f es convexa, sucede que

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$$

además, como $f(x_2) \leq y_2$ y $f(x_1) \leq y_1$, se tiene que

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq ty_2 + (1-t)y_1.$$

Ahora, veamos que f es convexa si U es convexo.
Sean x_1, $x_2 \in [a,b]$ y, consideremos $A = (x_1, f(x_1))$ y $B = (x_2, f(x_2))$. Claramente, A y B están en U, y por ser U convexo también está en U el segmento que los une, es decir, los puntos de la forma $tB + (1-t)A$ para $t \in [0,1]$. Esto es,

$$(tx_2 + (1-t)x_1, tf(x_2) + (1-t)f(x_1)) \in U,$$

pero esto implica que $f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$, por lo que f es convexa.

Criterio 1.5.6 *Una función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es convexa si y sólo si para cada* $x_0 \in [a,b]$ *se cumple que la función* $P(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *es no-decreciente para* $x \neq x_0$.

Demostración. Supongamos que f es convexa. Para probar que $P(x)$ es no-decreciente tomemos $x < y$ y mostremos que $P(x) \leq P(y)$. Podemos tener las siguientes tres situaciones: $x_0 < x < y$, $x < x_0 < y$ ó $x < y < x_0$.

[3]Un subconjunto $\mathcal{C}$ del plano es convexo si para cada par de puntos A, B en $\mathcal{C}$ se tiene que el segmento de recta que éstos determinan está contenido en $\mathcal{C}$. Como el segmento entre A y B son los puntos de la forma $tB + (1-t)A$, con $0 \leq t \leq 1$, lo que se pide es que éste pertenezca a $\mathcal{C}$.

Consideremos el primer caso, los otros dos se demuestran de manera semejante. Notemos primero que

$$\begin{aligned}
P(x) \leq P(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \\
&\Leftrightarrow \quad (f(x)-f(x_0))(y-x_0) \leq (f(y)-f(x_0))(x-x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad f(x)(y-x_0) \leq f(y)(x-x_0)+f(x_0)(y-x) \\
&\Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y)\frac{x-x_0}{y-x_0}+f(x_0)\frac{y-x}{y-x_0} \\
&\Leftrightarrow \quad f\left(\frac{x-x_0}{y-x_0}y+\frac{y-x}{y-x_0}x_0\right) \leq f(y)\frac{x-x_0}{y-x_0}+f(x_0)\frac{y-x}{y-x_0}.
\end{aligned}$$

De aquí, el resultado ya es evidente.

Criterio 1.5.7 *Si la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable*[4] *con derivada no-decreciente, entonces f es convexa. En particular, si f es dos veces derivable y $f''(x) \geq 0$ entonces la función es convexa.*

Demostración. Desde luego $f''(x) \geq 0$, para $x \in [a,b]$, garantiza que $f'(x)$ es no-decreciente. Vemos que $f'(x)$ no-decreciente implica que la función es convexa.
Sea $x = tb + (1-t)a$, un punto de $[a,b]$. Por el teorema del valor medio[5], existen $c \in (a,x)$ y $d \in (x,b)$ tales que

$$\begin{aligned}
&f(x)-f(a) = (x-a)f'(c) = t(b-a)f'(c) \\
\text{y} \quad &f(b)-f(x) = (b-x)f'(d) = (1-t)(b-a)f'(d).
\end{aligned}$$

Luego, por ser $f'(x)$ no-decreciente, tenemos que

$$(1-t)\,(f(x)-f(a)) = t(1-t)(b-a)f'(c) \leq t(1-t)(b-a)f'(d) = t(f(b)-f(x))$$

que reacomodando los términos nos da

$$f(x) \leq tf(b)+(1-t)f(a).$$

[4]Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $c \in [a,b]$ si $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ existe, y es derivable en $A \subset [a,b]$ si lo es en cada punto de A.

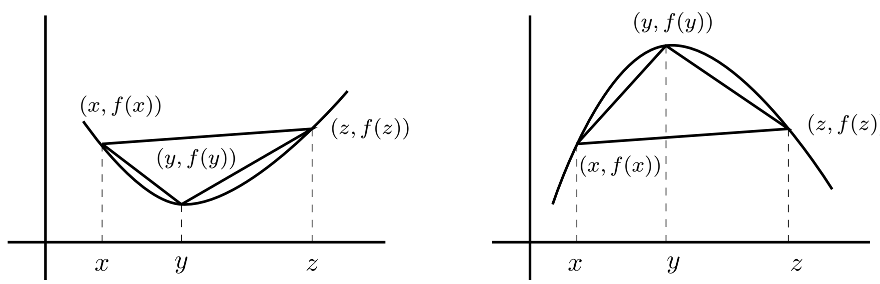
[5]Teorema del valor medio: Para una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, que también es derivable en (a,b) existe un número $x \in (a,b)$ tal que $f'(x)(b-a) = f(b)-f(a)$. Consultar [21], pág. 266.

Veamos, ahora, una **interpretación geométrica de la convexidad** (y la concavidad).

Sean x, y, z puntos en el intervalo $[a,b]$ con $x < y < z$. Si los vértices del triángulo XYZ tienen coordenadas $X = (x, f(x))$, $Y = (y, f(y))$, $Z = (z, f(z))$, entonces el área del triángulo está dada por

$$\Delta = \frac{1}{2}\det A, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{pmatrix}.$$

El área puede ser positiva o negativa, dependiendo si el triángulo XYZ se recorre en sentido positivo (contrario al avance de las manecillas del reloj) o en sentido negativo. Para una función convexa tendremos que $\Delta > 0$ y para una función cóncava $\Delta < 0$, como muestran las gráficas siguientes.



En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det A > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (z-y)f(x) - (z-x)f(y) + (y-x)f(z) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(y) < \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z). \end{aligned}$$

Si tomamos $t = \frac{y-x}{z-x}$, tenemos que $0 < t < 1$, $1 - t = \frac{z-y}{z-x}$, $y = tz + (1-t)x$ y $f(tz + (1-t)x) < tf(z) + (1-t)f(x)$.

Ahora veamos, una serie de ejemplos, donde resaltamos el uso de las funciones convexas para establecer desigualdades.

Ejemplo 1.5.8 *La función $f(x) = x^n$, $n \geq 1$ es convexa en $\mathbb{R}^+$ y la función $f(x) = x^n$, con n par, es convexa en $\mathbb{R}$.*

Lo anterior se sigue de que, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$, en las respectivas situaciones.

Como aplicaciones de este hecho obtenemos lo siguiente:

(i) Ya que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, tenemos que $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, que es la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática.

(ii) Como $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$ tenemos que, para a y b positivos tales que $a+b = 1$, se cumple que $a^n + b^n \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(iii) Tenemos que, para números positivos a y b, $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$. Esto se sigue de que,

$$\begin{aligned} 2^n = f(2) \leq f\left(\frac{\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(1+\frac{a}{b}\right)+f\left(1+\frac{b}{a}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.9 *La función exponencial* $f(x) = e^x$ *es convexa en* $\mathbb{R}$*, ya que* $f''(x) = e^x > 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Veamos varias aplicaciones de esta propiedad:

(i) **(Desigualdad $MG-MA$ con pesos)** Si $x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n$ son números positivos y $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, entonces

$$x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n} \leq t_1x_1 + \cdots + t_nx_n.$$

En efecto, como $x_i^{t_i} = e^{t_i \log x_i}$ y e^x es convexa, tenemos que

$$\begin{aligned} x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n} &= e^{t_1 \log x_1} \cdots e^{t_n \log x_n} = e^{t_1 \log x_1 + \cdots + t_n \log x_n} \\ &\leq t_1 e^{\log x_1} + \cdots + t_n e^{\log x_n} = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n. \end{aligned}$$

En particular, si tomamos $t_i = \frac{1}{n}$, para $1 \leq i \leq n$, obtenemos otra demostración de la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética para n números.

(ii) **(Desigualdad de Young)** Sean x, y números reales positivos. Si a, $b > 0$ satisfacen la condición $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1$, entonces $xy \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$.

Solamente es necesario aplicar la parte (i) como sigue,

$$xy = (x^a)^{\frac{1}{a}}\left(y^b\right)^{\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b.$$

(iii) **(Desigualdad de Hölder)** Sean x_1, x_2, ... , x_n, y_1, y_2, ... , y_n, números positivos y a, $b > 0$ tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{1/a} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^b\right)^{1/b}.$$

Supongamos primero que $\sum_{i=1}^{n} x_i^a = \sum_{i=1}^{n} y_i^b = 1$.

Por la parte (ii), $x_i y_i \leq \frac{1}{a} x_i^a + \frac{1}{b} y_i^b$, luego

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i^a + \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} y_i^b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Supongamos ahora que $\sum_{i=1}^{n} x_i^a = A$ y $\sum_{i=1}^{n} y_i^b = B$. Tomemos $x_i' = \frac{x_i}{A^{1/a}}$ $y_i' = \frac{y_i}{B^{1/b}}$. Como

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i')^a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^a}{A} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} (y_i')^b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^b}{B} = 1,$$

tenemos que

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i' = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{A^{1/a} B^{1/b}} = \frac{1}{A^{1/a} B^{1/b}} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq A^{1/a} B^{1/b}$.

Como un caso particular, cuando $a = b = 2$, se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Veamos ahora una consecuencia de la desigualdad de Hölder, la cual es una generalización de la desigualdad del triángulo.

Ejemplo 1.5.10 (Desigualdad de Minkowski) *Sean a_1, a_2, ... , a_n, b_1, b_2, ... , b_n números positivos y sea $p > 1$, entonces*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observemos que

$$(a_k + b_k)^p = a_k(a_k + b_k)^{p-1} + b_k(a_k + b_k)^{p-1}$$

luego,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}. \qquad (1.6)$$

Usemos la desigualdad de Hölder en cada término de la suma de la derecha en (1.6), con q tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, para obtener

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}\le\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}\le\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sustituyendo estas desigualdades en (1.6), y observando que $q(p-1)=p$, obtenemos la desigualdad requerida. La desigualdad de Minkowski es una igualdad si permitimos $p=1$. Para $0<p<1$, la desigualdad se invierte.

Ejemplo 1.5.11 *(Lista corta IMO, 1998) Si r_1, ... , r_n son números reales mayores que 1, muestre que*

$$\frac{1}{1+r_1}+\cdots+\frac{1}{1+r_n}\ge\frac{n}{\sqrt[n]{r_1\cdots r_n}+1}.$$

Notemos primero que la función $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ es convexa para $\mathbb{R}^+$, ya que $f'(x)=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ y $f''(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}\ge 0$, para $x>0$.

Ahora, si $r_i>1$, entonces $r_i=e^{x_i}$ para alguna $x_i>0$. Como $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ es convexa, tenemos que

$$\frac{1}{e^{\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)}+1}\le\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+e^{x_1}}+\cdots+\frac{1}{1+e^{x_n}}\right)$$

por tanto,

$$\frac{n}{\sqrt[n]{r_1\cdots r_n}+1}\le\frac{1}{1+r_1}+\cdots+\frac{1}{1+r_n}.$$

Ejemplo 1.5.12 *(China, 1989) Para cualesquiera n números x_1, ... , $x_n\in(0,1)$ y con $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\ge\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

Usaremos el hecho que la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ es convexa en $(0,1)$, esto se debe a que $f''(x) > 0$.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\,x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}},$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Bastará ahora ver que $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \leq \sqrt{n}$, pero esto se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$.

Ejemplo 1.5.13 *(Hungría-Israel, 1999) Sean k y l dos enteros positivos dados, y sean a_{ij}, $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq l$, kl números positivos dados. Muestre que si $q \geq p > 0$ entonces*

$$\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^{q}\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definamos $b_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{p}$, para $j = 1, 2, \ldots, l$, y denotemos la parte izquierda de la desigualdad a probar por L y su parte derecha por R. Entonces

$$\begin{aligned}
L^q &= \sum_{j=1}^{l} b_j^{\frac{q}{p}} \\
&= \sum_{j=1}^{l}\left(b_j^{\frac{q-p}{p}}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{p}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} b_j^{\frac{q-p}{p}} a_{ij}^{p}\right).
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
L^q &\leq \sum_{i=1}^{k}\left[\left(\sum_{j=1}^{l}\left(b_j^{\frac{q-p}{p}}\right)^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}\left(\sum_{j=1}^{l}(a_{ij}^{p})^{\frac{q}{p}}\right)\right]^{\frac{p}{q}} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[\left(\sum_{j=1}^{l} b_j^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^{q}\right)^{\frac{p}{q}}\right] \\
&= \left(\sum_{j=1}^{l} b_j^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^{q}\right)^{\frac{p}{q}}\right] = L^{q-p}R^p.
\end{aligned}$$

La desigualdad $L \leq R$ se sigue dividiendo ambos lados de $L^q \leq L^{q-p}R^p$ entre L^{q-p} y tomando la raíz p-ésima.

Ejercicio 1.77 *(i) Para a, $b \in \mathbb{R}^+$, con $a+b=1$, muestre que*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

(ii) Para a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, con $a+b+c=1$, muestre que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Ejercicio 1.78 *Para $0 \leq a$, b, $c \leq 1$, muestre que*

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Ejercicio 1.79 *(Rusia, 2000) Demuestre que para números reales x, y con $0 \leq x$, $y \leq 1$, se tiene que*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Ejercicio 1.80 *Muestre que la función* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *es cóncava en el intervalo* $[0, \pi]$. *Utilice lo anterior para verificar que los ángulos* A, B, C *de un triángulo cumplen con* $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Ejercicio 1.81 *Si* A, B, C, D *son ángulos en el intervalo* $[0, \pi]$, *entonces:*

(i) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \leq \operatorname{sen}^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$ *y la igualdad se cumple si y sólo si* $A = B$.

(ii) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{sen} D \leq \operatorname{sen}^4\left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)$.

(iii) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \leq \operatorname{sen}^3\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$.

Si además A, B, C *son los ángulos internos de un triángulo,*

(iv) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

(v) $\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

(vi) $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

Ejercicio 1.82 (Desigualdad de Bernoulli) (i) *Para todo número real* $x > -1$ *y todo entero positivo* n, *se cumple* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
(ii) *Use la desigualdad para dar otra demostración de la desigualdad* $MG-MA$.

Ejercicio 1.83 (Desigualdad de Schür) *Si* x, y, z *son reales positivos y* n *es un entero positivo, se cumple*

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-z)(y-x) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Para el caso $n = 1$, *la desigualdad puede tomar una de las siguientes formas:*

(a) $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$.

(b) $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

(c) Si $x + y + z = 1$, $9xyz + 1 \geq 4(xy + yz + zx)$.

Ejercicio 1.84 *(Canadá, 1992) Cualesquiera tres números reales no negativos* x, y *y* z *cumplen*

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

Ejercicio 1.85 *Si a, b y c son reales positivos, pruebe que*

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Ejercicio 1.86 *Sean a, b y c números reales positivos, pruebe que*

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq\frac{6}{a+b+c}.$$

Más aún, si $abc=1$, pruebe que

$$1+\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{6}{ab+bc+ca}.$$

Ejercicio 1.87 (Desigualdad entre medias potenciales) *Sean x_1, x_2, $\dots$, x_n números reales positivos y sean t_1, t_2, $\dots$, t_n números reales positivos tales que su suma sea 1. Sean r y s dos números reales positivos distintos de cero tal que $r>s$. Muestre que*

$$(t_1x_1^r+\cdots+t_nx_n^r)^{\frac{1}{r}}\geq(t_1x_1^s+\cdots+t_nx_n^s)^{\frac{1}{s}},$$

la igualdad se da si y sólo si $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Ejercicio 1.88 (Dos extensiones de la desigualdad de Hölder.) *Sean x_1, x_2, $\dots$, x_n, y_1, y_2, $\dots$, y_n, z_1, z_2, $\dots$, z_n números reales positivos.*

(i) *Si a, b, c son números reales positivos tales que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, entonces*

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^c\right\}^{\frac{1}{c}}\leq\left\{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^a\right\}^{\frac{1}{a}}\left\{\sum_{i=1}^{n}{y_i}^b\right\}^{\frac{1}{b}}.$$

(ii) *Si a, b, c son números reales positivos tales que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_iz_i\leq\left\{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^a\right\}^{\frac{1}{a}}\left\{\sum_{i=1}^{n}{y_i}^b\right\}^{\frac{1}{b}}\left\{\sum_{i=1}^{n}{z_i}^c\right\}^{\frac{1}{c}}.$$

Ejercicio 1.89 (Desigualdad de Popoviciu) *Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces, para a, b, $c \in I$, muestre que*

$$\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right] \leq$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}+f\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Ejercicio 1.90 *Sean a, b, c números reales no negativos, muestre que:*
(i) $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab+bc+ca)$.
(ii) $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Ejercicio 1.91 *Sean a, b, c números reales positivos, muestre que*

$$\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right) \geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

1.6. Una desigualdad útil

Primero, estudiemos dos identidades algebraicas muy útiles, que se pueden deducir al considerar un factor especial de $a^3+b^3+c^3-3abc$.
Sea P el polinomio cúbico

$$P(x) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

Como a, b, c satisfacen la ecuación $P(x)=0$, se tiene que

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc = 0,$$
$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc = 0,$$
$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc = 0.$$

Sumando estas tres igualdades, obtenemos

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \tag{1.7}$$

La identidad anterior implica el siguiente resultado, si $a+b+c=0$, entonces $a^3+b^3+c^3=3abc$.

También tenemos que la expresión

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

puede ser escrita como

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]. \qquad (1.8)$$

De esta forma, obtenemos otra versión de la identidad (1.7),

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]. \qquad (1.9)$$

Esta presentación de la identidad implica una demostración más corta de la desigualdad $MG - MA$ para tres variables. De (1.9), es claro que si a, b, c son números positivos, entonces $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Ahora, si x, y, z son números positivos, tomando $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ y $c = \sqrt[3]{z}$, podemos deducir que

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z$.
Observe que se puede utilizar la identidad (1.8) para dar otra demostración del ejercicio 1.27.

Ejercicio 1.92 *Para números reales x, y, z, muestre que*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq |xy + yz + zx|.$$

Ejercicio 1.93 *Para números positivos reales a, b, c, muestre que*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

Ejercicio 1.94 *Si $x < y < z$ son números reales, muestre que*

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 > 0.$$

Ejercicio 1.95 *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}} \geq \text{máx}\,\{a,b,c\}.$$

Ejercicio 1.96 *(Rumania, 2007) Para números reales no-negativos x, y, z, muestre que*

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|.$$

Ejercicio 1.97 *(UK, 2008) Encuentra el mínimo de $x^2+y^2+z^2$, donde x, y, z son números reales que satisfacen que $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$.*

Una desigualdad simple, que puede ser utilizada para demostrar un gran número de desigualdades algebraicas, es la siguiente.

Teorema 1.6.1 (Una desigualdad útil) *Si a, b, x, y son números reales y x, y son positivos, entonces se tiene la siguiente desigualdad*

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}. \tag{1.10}$$

Demostración. La demostración es muy simple. Simplificando, podemos expresar la desigualdad como

$$a^2y(x+y)+b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy,$$

la cual se reduce a la desigualdad $(ay-bx)^2 \geq 0$ que es obvia. Vemos que la igualdad se tiene si y sólo si $ay = bx$, esto es, si $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Otra forma de justificar este resultado es utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la siguiente manera,

$$(a+b)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}\sqrt{y}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)(x+y).$$

Usando el teorema dos veces, podemos extender la desigualdad para tres pares de números,

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$$

y un simple argumento inductivo muestra que

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}, \tag{1.11}$$

para todos los números reales a_1, a_2, ... , a_n y x_1, x_2, ... , $x_n > 0$, con igualdad si y sólo si

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\cdots=\frac{a_n}{x_n}.$$

La desigualdad (1.11) es conocida también como la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma de Engel o el Principio del mínimo de Arthur Engel.

Como una primera aplicación de esta desigualdad, damos otra demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+\cdots+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2},$$

entonces

$$\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+\cdots+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2}\geq\frac{(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

Luego, podemos concluir

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

y la igualdad se tiene si y sólo si

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Existen otras formas de la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la Engel, como las del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.2 *Sean a_1, ... , a_n, b_1, ... , b_n números reales positivos. Muestre que:*

(i) $\dfrac{a_1}{b_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}\geq\dfrac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}$.

(ii) $\dfrac{a_1}{b_1^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n^2}\geq\dfrac{1}{a_1+\cdots+a_n}\left(\dfrac{a_1}{b_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2$.

Estas dos desigualdades se siguen de la desigualdad útil aplicada de las siguientes maneras:

(i) $\dfrac{a_1}{b_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a_1^2}{a_1b_1}+\cdots+\dfrac{a_n^2}{a_nb_n}\geq\dfrac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}.$

(ii) $\dfrac{a_1}{b_1^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n^2}=\dfrac{\frac{a_1^2}{b_1^2}}{a_1}+\cdots+\dfrac{\frac{a_n^2}{b_n^2}}{a_n}\geq\dfrac{1}{a_1+\cdots+a_n}\left(\dfrac{a_1}{b_1}+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}\right)^2.$

Ejemplo 1.6.3 *(APMO, 1991) Sean a_1, ... , a_n, b_1, ... , b_n, números reales positivos, tal que $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$. Muestre que*

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{1}{2}(a_1+\cdots+a_n).$$

Observemos que (1.11) implica

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}&\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n}\\&=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\\&=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n).\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo es una demostración de la desigualdad entre la media cuadrática y la media aritmética.

Ejemplo 1.6.4 (Desigualdad media cuadrática-media aritmética) *Para números reales positivos x_1, ... , x_n, se tiene que*

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\geq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Observemos que usando (1.11), se tiene que

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n^2}$$

y ésta implica la desigualdad de arriba.

En algunos casos los numeradores no son cuadrados, pero un simple truco nos permite escribirlos como cuadrados y entonces podemos aplicar la desigualdad. El siguiente ejemplo es una primera aplicación de este truco, la cual nos permite dar una demostración más corta del ejemplo 1.4.9.

Ejemplo 1.6.5 *(IMO, 1995) Sean a, b, c números positivos tal que $abc = 1$. Demuestre que*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \\
&\geq \frac{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2abc} \\
&\geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de (1.11) y la segunda es una consecuencia de la desigualdad $MG - MA$.
Otro ejemplo del uso de la desigualdad (1.11) es la siguiente demostración de la desigualdad de Nesbitt.

Ejemplo 1.6.6 (Desigualdad de Nesbitt) *Para a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, se tiene que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Multipliquemos los tres términos de la izquierda de la desigualdad por $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{c}{c}$, respectivamente, y ahora usemos la desigualdad (1.11) para obtener

$$\frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

De la ecuación (1.8), obtenemos $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ y entonces $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Por lo tanto

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}.$$

Ejemplo 1.6.7 *(Repúblicas Checa y Eslovaca, 1999) Para números reales positivos a, b y c, muestre la desigualdad*

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

Observemos que

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{a^2}{ab+2ca}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ca+2bc}.$$

Entonces usando (1.11) tenemos que

$$\frac{a^2}{ab+2ca}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ca+2bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq 1,$$

donde la última desigualdad se sigue como en el ejemplo anterior.

Ejercicio 1.98 *(Sudáfrica, 1995) Para números positivos a, b, c, d, muestre que*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Ejercicio 1.99 *Sean a y b números reales positivos, muestre que*

$$8(a^4+b^4)\geq(a+b)^4.$$

Ejercicio 1.100 *Sean x, y, z números reales positivos, muestre que*

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\geq\frac{9}{x+y+z}.$$

Ejercicio 1.101 *Sean a, b, x, y, z números reales positivos, muestre que*

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}.$$

Ejercicio 1.102 *Sean a, b, c números reales positivos, muestre que*

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq a+b+c.$$

Ejercicio 1.103 (i) *Sean x, y, z números reales positivos, muestre que*

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{1}{2}.$$

(ii) *(Moldavia, 2007) Sean w, x, y, z números reales positivos, muestre que*

$$\frac{w}{x+2y+3z}+\frac{x}{y+2z+3w}+\frac{y}{z+2w+3x}+\frac{z}{w+2x+3y}+\geq\frac{2}{3}.$$

Ejercicio 1.104 *(Croacia, 2004) Sean x, y, z números reales positivos, muestre que*

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geq\frac{3}{4}.$$

Ejercicio 1.105 *Para números reales positivos a, b, c, d, muestre que*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2.$$

Ejercicio 1.106 *Sean a, b, c, d, e números reales positivos, muestre que*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\geq\frac{5}{2}.$$

Ejercicio 1.107 (i) *Muestre que, para todos los números reales positivos a, b, c, x, y, z con $a\geq b\geq c$ y $z\geq y\geq x$, se tiene la siguiente desigualdad*

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

(ii) *(Belorusia, 2000) Muestre que, para todos los números reales a, b, c, x, y, z, se sigue la siguiente desigualdad*

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Ejercicio 1.108 *(Grecia, 2008) Para x_1, x_2, $\ldots$, x_n números enteros positivos, muestre que*

$$\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)^{\frac{kn}{t}}\geq x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n,$$

donde $k=\text{máx}\,\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ and $t=$ mín $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. ¿Bajo que condiciones es válida la igualdad?

1.7. La estrategia de sustitución

Una estrategia útil para resolver problemas de desigualdades es el uso de sustituciones. Es decir, sustituir unas variables por otras de manera que el problema tenga una expresión más amable para trabajar. Con una sustitución conveniente se puede lograr, por ejemplo, que cambien un poco los términos difíciles de manejar, simplificar expresiones o bien reducir términos. Aún cuando no hay recetas para hacer esto, en esta sección se dan algunas ideas de lo que puede hacerse, como siempre lo mejor es trabajar con algunos ejemplos.

Una primera sugerencia es que para problemas donde hay una condición extra, hay que intentar utilizarla para simplificar la desigualdad. En el siguiente ejemplo con la condición extra se eliminan denominadores buscando hacer más fácil el problema.

Ejemplo 1.7.1 *Si a, b, c son números reales positivos y menores que 1, con $a + b + c = 2$, se tiene que*

$$\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right) \geq 8.$$

Después de hacer la sustitución $x = 1 - a$, $y = 1 - b$, $z = 1 - c$, tenemos que $x + y + z = 3 - (a + b + c) = 1$, $a = 1 - x = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Por lo tanto, la desigualdad es ahora equivalente a

$$\left(\frac{y+z}{x}\right)\left(\frac{z+x}{y}\right)\left(\frac{x+y}{z}\right) \geq 8,$$

y ésta, a su vez, es equivalente a

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz.$$

Pero ésta última desigualdad es inmediata. Basta aplicar tres veces la desigualdad $MG - MA$ de la siguiente manera $(x + y) \geq 2\sqrt{xy}$ (ver el ejercicio 1.26).

Puede suceder que la condición debe usarse simplemente para dirigirse a la solución, como en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 1.7.2 *(México, 2007) Si a, b, c son números reales positivos que satisfacen $a + b + c = 1$, muestre que*

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$

Usando la condición $a+b+c=1$, se tiene que

$$a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c),$$

luego, por la desigualdad $MG-MA$,

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\leq\frac{2a+b+c}{2}.$$

Análogamente,

$$\sqrt{b+ca}\leq\frac{2b+c+a}{2}\quad \text{y}\quad \sqrt{c+ab}\leq\frac{2c+a+b}{2}.$$

Por lo que, al sumar las tres desigualdades, se obtiene

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\leq$$
$$\frac{2a+b+c}{2}+\frac{2b+c+a}{2}+\frac{2c+a+b}{2}=\frac{4a+4b+4c}{2}=2.$$

La igualdad se alcanza cuando $a+b=a+c,\ b+c=b+a$ y $c+a=c+b$, lo que nos lleva a que, $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ejemplo 1.7.3 *Si a, b, c son números reales positivos con $ab+bc+ca=1$ muestre que,*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\leq\frac{3}{2}.$$

Notemos que $(a^2+1)=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$, y, análogamente, $b^2+1=(b+c)(b+a)$ y $c^2+1=(c+a)(c+b)$. Ahora la desigualdad, que estamos considerando, es equivalente a

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leq\frac{3}{2}.$$

Por la desigualdad $MG-MA$ aplicada a cada sumando del lado izquierdo, tenemos que

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)=\frac{3}{2}.$$

Los problemas muchas veces sugieren qué sustitución debe hacerse. En el siguiente ejemplo la sustitución nos permite convertir al menos a uno de los términos de la desigualdad en una expresión más sencilla.

Ejemplo 1.7.4 *(India, 2002) Si a, b, c son números reales positivos, muestre la siguiente desigualdad*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}.$$

Al hacer, $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, el lado izquierdo de la desigualdad es ahora muy sencillo, $x+y+z$. Veamos como queda el lado derecho. El primer sumando se modifica así,

$$\frac{c+a}{c+b}=\frac{1+\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}}=\frac{1+\frac{a}{b}\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}}=\frac{1+xy}{1+y}=x+\frac{1-x}{1+y}.$$

Análogamente,

$$\frac{a+b}{a+c}=y+\frac{1-y}{1+z} \quad \text{y} \quad \frac{b+c}{b+a}=z+\frac{1-z}{1+x}.$$

Ahora, la desigualdad es equivalente a tener

$$\frac{x-1}{1+y}+\frac{y-1}{1+z}+\frac{z-1}{1+x} \geq 0.$$

Solamente que, ahora, contamos con una condición extra $xyz=1$.
La desigualdad anterior la podemos rescribir como

$$(x^2-1)(z+1)+(y^2-1)(x+1)+(z^2-1)(y+1) \geq 0$$

y está es equivalente a,

$$x^2z+y^2x+z^2y+x^2+y^2+z^2 \geq x+y+z+3.$$

Pero, por la desigualdad $MG-MA$, $x^2z+y^2x+z^2y \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3$. También, tenemos $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = \frac{x+y+z}{3}(x+y+z) \geq \sqrt[3]{xyz}(x+y+z)=x+y+z$, donde la primera desigualdad se obtuvo de aplicar la desigualdad (1.11).

Para hacer una sustitución a veces es necesario preparar un poco el terreno como muestra el siguiente ejemplo. Éste también sirve para señalar que se puede necesitar hacer más de un proceso de sustitución.

Ejemplo 1.7.5 *Sean a, b, c números reales positivos, muestre que se cumple que*

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Al dividir entre a^2 cada lado de la desigualdad y tomar $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$, la desigualdad se transforma en

$$(1+x)(1+y) \geq 2\sqrt{xy(1+x+y)}.$$

Ahora, al dividir entre xy ambos lados y hacer la sustitución $r = 1+\frac{1}{x}$, $s = 1+\frac{1}{y}$, la desigualdad a demostrar ahora es

$$rs \geq 2\sqrt{rs-1}.$$

Esta última, es equivalente a $(rs-2)^2 \geq 0$, que es inmediata.

Es una situación común que los problemas tengan varias formas de resolverse, resulta también que pueden aceptar varias sustituciones que ayuden a resolverlo. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.7.6 *(Corea, 1998) Si a, b, c son números reales positivos, tales que $a+b+c = abc$, muestre que*

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Bajo la sustitución $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, la condición $a+b+c = abc$, se traduce en $xy + yz + zx = 1$ y la desigualdad es equivalente a

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}.$$

Pero ésta es la tercera desigualdad de esta sección.

Otra posible sustitución para resolver el ejemplo anterior es considerar la sustitución $a = \tan A$, $b = \tan B$, $c = \tan C$, como se tiene que $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ entonces $A + B + C = \pi$ (o bien un múltiplo de π). Pero como $1 + \tan^2 A = (\cos A)^{-2}$, la desigualdad es equivalente a $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ que es válida como se verá en el ejemplo 2.5.2. Note que la desigualdad de Jensen no es posible aplicarla en este caso ya que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ no es cóncava en $\mathbb{R}^+$.

En el ejemplo anterior vimos que además de las sustituciones algebráicas hay sustituciones trigonómetricas. Esto se muestra también en el siguiente ejemplo. En las secciones 2.2 y 2.5 del siguiente capítulo trabajaremos con sustituciones geométricas.

Ejemplo 1.7.7 *(Rumania, 2002) Si a, b, c son números reales del intervalo* $(0, 1)$. *Muestre que*

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

Al hacer la sustitución $a = \cos^2 A$, $b = \cos^2 B$, $c = \cos^2 C$, con A, B, C en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, se tiene que $\sqrt{1-a} = \sqrt{1-\cos^2 A} = \operatorname{sen} A$, $\sqrt{1-b} = \operatorname{sen} B$ y $\sqrt{1-c} = \operatorname{sen} C$. Por lo que la desigualdad es equivalente a

$$\cos A \cos B \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C < 1.$$

Para demostrar esta desigualdad bastará observar que,

$$\begin{aligned} \cos A \cos B \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C &< \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ &= \cos(A - B) \leq 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.109 *Sean x, y, z números reales positivos, muestre que*

$$\frac{x^3}{x^3 + 2y^3} + \frac{y^3}{y^3 + 2z^3} + \frac{z^3}{z^3 + 2x^3} \geq 1.$$

Ejercicio 1.110 *(Kazajastán, 2008) Sean x, y, z son números reales positivos que cumplen con $xyz = 1$, muestre que*

$$\frac{1}{yz + z} + \frac{1}{zx + x} + \frac{1}{xy + y} \geq \frac{3}{2}.$$

Ejercicio 1.111 *(Rusia, 2004) Si $n > 3$ y $x_1, x_2, ..., x_n$ son números reales positivos, con $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, muestre que*

$$\frac{1}{1 + x_1 + x_1 x_2} + \frac{1}{1 + x_2 + x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n + x_n x_1} > 1.$$

Ejercicio 1.112 *(Polonia, 2006) Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $ab + bc + ca = abc$, muestre que*

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

Ejercicio 1.113 *(Irlanda, 2007) Sean a, b, c números reales positivos, muestre que*

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ca}{b}\right).$$

Ejercicio 1.114 *(Rumania, 2008) Sean a, b, c números reales positivos, con $abc = 8$, muestre que*

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1} \leq 0.$$

1.8. Teorema de Muirhead

En 1903, R.F. Muirhead publicó un artículo acerca de algunos métodos algebraicos usados en el estudio de identidades y desigualdades de funciones simétricas algebraicas de n variables.
Él consideró expresiones algebraicas de la forma $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$, luego analizó polinomios simétricos que contenían estas expresiones, para dar "un orden"en el espacio de n-adas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ que satisfacían la condición $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Vamos a suponer que $x_i > 0$ para toda $1 \leq i \leq n$. Denotemos por

$$\sum\nolimits_{!} F(x_1, ..., x_n)$$

la suma de los $n!$ términos obtenidos de evaluar $F(x_1, ..., x_n)$ en todas las posibles permutaciones de $(x_1, ..., x_n)$. Nosotros consideramos sólo el caso particular

$$F(x_1, ..., x_n) = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}, \quad \text{con } x_i > 0,\ a_i \geq 0.$$

Escribimos $[a] = [a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{!} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$. Por ejemplo, para las variables x, y, $z > 0$ se tiene

$$[1,1] = xy, \;\; [1,1,1] = xyz, \;\; [2,1,0] = \frac{1}{3!}[x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)].$$

Es claro que $[a]$ es invariante bajo cualquier permutación de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y entonces los dos conjuntos de a son del mismo tipo si ellos sólo difieren por reacomodo. Diremos que un valor de media del tipo $[a]$ es una media simétrica, por ejemplo, $[1, 0, ..., 0] = \frac{(n-1)!}{n!}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ es la media

aritmética y $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}] = \frac{n!}{n!}(x_1^{\frac{1}{n}} \cdot x_2^{\frac{1}{n}} \cdots x_n^{\frac{1}{n}}) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ es la media geométrica. Cuando $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, $[a]$ es una generalización común de la media aritmética y de la media geométrica.
Si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, en general $[b]$ no es comparable con $[a]$, en el sentido que exista una desigualdad entre ellos, válida para todos los números reales no negativos x_1, x_2, ..., x_n.

Muirhead deseaba comparar los valores de los polinomios simétricos $[a]$ y $[b]$ para cualquier valor no negativo de las variables en ambos polinomios.
Definamos de ahora en adelante $(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Definición 1.8.1 *Decimos que (a) mayoriza a (b) y escribimos $(b) \prec (a)$, cuando (a) y (b) se pueden arreglar de tal forma que satisfacen las siguientes dos condiciones:*

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i.$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} b_i \leq \sum_{i=1}^{\nu} a_i$, *para toda* $1 \leq \nu < n$.

Es claro que $(a) \prec (a)$ y que si $(c) \prec (b)$ y $(b) \prec (a)$ garantizan $(c) \prec (a)$.

Teorema 1.8.2 (Teorema de Muirhead) $[b] \leq [a]$ *para cualesquiera valores no negativos de las variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$ si y sólo si $(b) \prec (a)$. La igualdad sólo se tiene cuando (b) y (a) son idénticos o cuando todos los x_i son iguales.*

Antes de pasar a la demostración del teorema, la cual es un poco complicada, veamos algunos ejemplos. Primero, es claro que $[2, 0, 0]$ no puede ser comparado con $[1, 1, 1]$ ya que la primera condición en la definición 1.8.1 no se satisface, pero podemos ver que $[2, 0, 0] \geq [1, 1, 0]$, lo cual es equivalente a

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

De la misma forma, podemos ver que:

1. $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow [2, 0] \geq [1, 1]$,
2. $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \Leftrightarrow [3, 0, 0] \geq [1, 1, 1]$,
3. $x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + x^2y^3 \Leftrightarrow [5, 0] \geq [3, 2]$,
4. $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + y^2xz + z^2xy \Leftrightarrow [2, 2, 0] \geq [2, 1, 1]$,

donde todas las desigualdades son verdaderas si aceptamos el teorema de Muirhead.

Demostración. (**Teorema de Muirhead**) Supongamos que $[b] \leq [a]$ para todos los números positivos x_1, x_2, ..., x_n. Tomando $x_i = x$, para todo i, obtenemos

$$x^{\sum b_i} = [b] \leq [a] = x^{\sum a_i}.$$

Esto sólo puede ser verdadero para todo x si $\sum b_i = \sum a_i$.

Ahora, sean $x_1 = x_2 = \cdots = x_\nu = x$, $x_{\nu+1} = \cdots = x_n = 1$ para x grande. Como (b) y (a) están en orden decreciente, los índices de las potencias más grandes de x en $[b]$ y $[a]$ son

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu,$$

respectivamente. Luego, es claro que la primera no puede ser mayor que la segunda y esto prueba (2) en la definición 1.8.1.

La demostración en la otra dirección es más complicada, y para esto necesitaremos una nueva definición y dos lemas.

Definiremos un tipo especial de transformación lineal T de a, como sigue. Suponga que $a_k > a_l$, y escribimos

$$a_k = \rho + \tau, \quad a_l = \rho - \tau \quad (0 < \tau \leq \rho).$$

Si ahora $0 \leq \sigma < \tau \leq \rho$, entonces la transformación T se define como

$$T(a_k) = b_k = \rho + \sigma = \frac{\tau + \sigma}{2\tau} a_k + \frac{\tau - \sigma}{2\tau} a_l$$

$$T(a_l) = b_l = \rho - \sigma = \frac{\tau - \sigma}{2\tau} a_k + \frac{\tau + \sigma}{2\tau} a_l$$

$$T(a_\nu) = a_\nu \quad (\nu \neq k, \, \nu \neq l).$$

Si (b) es la "imagen" de (a) bajo la transformación T, escribimos $b = Ta$. La definición no necesariamente implica que (a) o (b) están en orden decreciente. La suficiencia de nuestra condición de comparabilidad será establecida, si podemos demostrar los siguientes dos lemas.

Lema 1.8.3 *Si $b = Ta$ entonces $[b] \leq [a]$, con igualdad sólo cuando todos los x_i son iguales.*

Demostración. Podemos reacomodar (a) y (b) de tal forma que $k=1$, $l=2$. Entonces

$$\begin{aligned}
[a]-[b] &= [\rho+\tau,\rho-\tau,x_3,...]-[\rho+\sigma,\rho-\sigma,x_3,...]\\
&= \frac{1}{2n!}\sum\nolimits_{!} x_3^{a_3}\cdots x_n^{a_n}(x_1^{\rho+\tau}x_2^{\rho-\tau}+x_1^{\rho-\tau}x_2^{\rho+\tau})\\
&\quad -\frac{1}{2n!}\sum\nolimits_{!} x_3^{a_3}\cdots x_n^{a_n}(x_1^{\rho+\sigma}x_2^{\rho-\sigma}+x_1^{\rho-\sigma}x_2^{\rho+\sigma})\\
&= \frac{1}{2n!}\sum\nolimits_{!}(x_1x_2)^{\rho-\tau}x_3^{a_3}\cdots x_n^{a_n}(x_1^{\tau+\sigma}-x_2^{\tau+\sigma})(x_1^{\tau-\sigma}-x_2^{\tau-\sigma})\geq 0
\end{aligned}$$

con igualdad sólo cuando todos los x_i son iguales.

Lema 1.8.4 *Si $(b)\prec(a)$, con (b) no idéntica a (a), entonces (b) puede ser obtenida de (a) usando sucesivas aplicaciones de un número finito de transformaciones T.*

Demostración. Al número de diferencias $a_\nu - b_\nu$ distintas de cero, le llamaremos la *discrepancia* entre (a) y (b). Si la discrepancia es cero, los conjuntos son iguales. Demostremos el lema por inducción, suponiendo que es verdadero cuando la discrepancia es menor que r y demostrando que es verdadero cuando la discrepancia es r.

Supongamos entonces, que $(b)\prec(a)$ y que la discrepancia es $r>0$. Como $\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^n b_i$, y $\sum(a_\nu-b_\nu)=0$, y no todas las diferencias son cero, deben existir diferencias positivas y negativas, y la primera que nos es cero debe ser positiva por la segunda condición de $(b)\prec(a)$. Entonces, podemos encontrar k y l tal que

$$b_k<a_k,\quad b_{k+1}=a_{k+1},\ \dots\ ,b_{l-1}=a_{l-1},\quad b_l>a_l, \tag{1.12}$$

esto es, a_l-b_l es la primera diferencia negativa y a_k-b_k es la última diferencia positiva que la precede.

Sea $a_k=\rho+\tau$, $a_l=\rho-\tau$, y defina σ por

$$\sigma=\text{máx}\,\{|b_k-\rho|\ ,\ |b_l-\rho|\}.$$

Entonces $0<\tau\leq\rho$, ya que $a_k>a_l$. También, uno o el otro de $b_l-\rho=-\sigma$ y $b_k-\rho=\sigma$, es verdadero, ya que $b_k\geq b_l$, y $\sigma<\tau$, además $b_k<a_k$ y $b_l>a_l$. Luego, $0\leq\sigma<\tau\leq\rho$.

Ahora escribimos $a'_k=\rho+\sigma$, $a'_l=\rho-\sigma$, $a'_\nu=x_\nu$ ($\nu\neq k$, $\nu\neq l$). Si $b_k-\rho=\sigma$, $a'_k=b_k$ y si $b_l-\rho=-\sigma$ entonces $a'_l=b_l$. Como cada una de las parejas a_k,

b_k y a_l, b_l contribuye con una unidad a la discrepancia r entre (b) y (a), la discrepancia entre (b) y (a') es menor, la cual es $r-1$ o $r-2$.
Enseguida, comparemos la definición de (a') con la definición de T y, observando que $0 \leq \sigma < \tau \leq \rho$, podemos deducir que (a') proviene de (a) por medio de una transformación T.
Finalmente, $(b) \prec (a')$. Para demostrar esto, debemos verificar que las dos condiciones de $\prec$ son satisfechas y que el orden de (a') es no creciente. Para la primera condición, tenemos

$$a'_k + a'_l = 2\rho = a_k + a_l, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a'_i.$$

Para la segunda condición, necesitamos demostrar que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu \leq a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_\nu.$$

Ahora, esto es verdadero si $\nu < k$ o $\nu \geq l$, como se puede ver de la definición de (a') y usando la segunda condición de $(b) \prec (a)$. Esto es cierto para $\nu = k$, ya que es cierto para $\nu = k-1$ y $b_k \leq a'_k$, y es verdadero para $k < \nu < l$, ya que es válido para $\nu = k$ y los elementos que aparecen en b y a' son idénticos.
Finalmente, podemos observar que

$$b_k \leq \rho + |b_k - \rho| \leq \rho + \sigma = a'_k,$$

$$b_l \geq \rho - |b_l - \rho| \geq \rho - \sigma = a'_l$$

y entonces, usando (1.12),

$$a'_{k-1} = a_{k-1} \geq a_k = \rho + \tau > \rho + \sigma = a'_k \geq b_k \geq b_{k+1} = a_{k+1} = a'_{k+1},$$

$$a'_{l-1} = a_{l-1} = b_{l-1} \geq b_l \geq a'_l = \rho - \sigma > \rho - \tau = a_l \geq a_{l+1} = a'_{l+1}.$$

Así las desigualdades que afectan a a' son las buscadas.
Por lo tanto, hemos demostrado que $(b) \prec (a')$, un conjunto que proviene de (a) usando una transformación T que tiene una discrepancia con (b) menor a r. Esto completa la demostración del lema y del teorema de Muirhead.

La demostración del teorema de Muirhead nos muestra, por medio de un uso repetido de la transformación T, como las diferencias entre dos medias comparables puede ser descompuesta como una suma de términos que son obviamente positivos. Podemos deducir, de este último resultado, una nueva demostración de la desigualdad $MG - MA$.

Ejemplo 1.8.5 (Desigualdad $MG - MA$)

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Notemos que la desigualdad $MG - MA$ es equivalente a

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n}{n}$$

donde $x_i = \sqrt[n]{y_i}$.
Ahora, observemos que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^n = [n, 0, 0, ..., 0] \text{ y } x_1 x_2 \cdots x_n = [1, 1, ..., 1].$$

Por el teorema de Muirhead, podemos deducir que

$$[1, 1, ..., 1] \leq [n, 0, 0, ..., 0].$$

Enseguida, daremos otra demostración de la desigualdad $MG-MA$, siguiendo las ideas de la demostración del teorema de Muirhead, para ilustrar como trabaja.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^n - (x_1 x_2 \cdots x_n) &= [n, 0, 0, ..., 0] - [1, 1, ..., 1] \\
&= ([n, 0, 0, ..., 0] - [n-1, 1, 0, ..., 0]) + \\
&\quad +([n-1, 1, 0, ..., 0] - [n-2, 1, 1, 0, ..., 0]) + \\
&\quad +([n-2, 1, 1, 0, ..., 0] - [n-3, 1, 1, 1, 0, ..., 0]) + \\
&\quad +... + ([2, 1, 1, ..., 1] - [1, 1, .., 1]) \\
&= \frac{1}{2n!}\Big(\sum\nolimits_! (x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2) + \\
&\quad + \sum\nolimits_! (x_1^{n-2} - x_2^{n-2})(x_1 - x_2)x_3 + \\
&\quad + \sum\nolimits_! (x_1^{n-3} - x_2^{n-3})(x_1 - x_2)x_3 x_4 + ...\Big).
\end{aligned}$$

Como $(x_r^\nu - x_s^\nu)(x_r - x_s) > 0$, a menos que $x_r = x_s$, la desigualdad se sigue.

Ejemplo 1.8.6 *Si a, b son números reales positivos, entonces*

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Sea $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, simplificando vemos que se tiene que demostrar

$$x^3 + y^3 \geq xy(x + y).$$

Por el teorema de Muirhead, tenemos que

$$[3, 0] = \frac{1}{2}(x^3 + y^3) \geq \frac{1}{2}xy(x + y) = [2, 1],$$

luego, el resultado se sigue.

Ejemplo 1.8.7 *Si a, b, c son números reales no negativos, muestre que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq \frac{1}{7}(a + b + c)^3.$$

No es difícil ver que

$$(a + b + c)^3 = 3[3, 0, 0] + 18[2, 1, 0] + 36[1, 1, 1].$$

Luego, demostraremos que

$$3[3, 0, 0] + 6[1, 1, 1] \geq \frac{1}{7}(3[3, 0, 0] + 18[2, 1, 0] + 36[1, 1, 1]),$$

esto es,

$$\frac{18}{7}[3, 0, 0] + \left(6 - \frac{36}{7}\right)[1, 1, 1] \geq \frac{18}{7}[2, 1, 0]$$

o

$$\frac{18}{7}([3, 0, 0] - [2, 1, 0]) + \left(6 - \frac{36}{7}\right)[1, 1, 1] \geq 0.$$

Esto se sigue usando las desigualdades $[3, 0, 0] \geq [2, 1, 0]$ y $[1, 1, 1] \geq 0$.

Ejemplo 1.8.8 *Si a, b, c son números reales no negativos, muestre que*

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Las desigualdades son equivalentes a

$$2(a^2bc + ab^2c + abc^2) \leq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \leq 2(a^4 + b^4 + c^4),$$

que a su vez es equivalente a $[2, 1, 1] \leq [3, 1, 0] \leq [4, 0, 0]$. Usando el teorema de Muirhead obtenemos el resultado.

Ejercicio 1.115 *Cualesquiera tres números reales a, b y c, satisfacen que*

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + b^3ca + c^3ab.$$

Ejercicio 1.116 *(IMO, 1961) Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y sea (ABC) su área. Muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Ejercicio 1.117 *Sean a, b, c números reales positivos, muestre que*

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Ejercicio 1.118 *(IMO, 1964) Sean a, b, c números reales positivos. Muestre que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Ejercicio 1.119 *(Lista corta Iberoamericana, 2003) Sean a, b, c números reales positivos. Muestre que*

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq a + b + c.$$

Ejercicio 1.120 *(Lista corta IMO, 1998) Sea a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestre que*

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Capítulo 2

Desigualdades Geométricas

2.1. Dos desigualdades básicas

Las dos desigualdades básicas en geometría se refieren a los triángulos. Una de ellas es la desigualdad del triángulo y es la que más adelante vamos a referir como D1, la segunda no es propiamente una desigualdad, es una observación importante de la geometría de los triángulos, donde se señala que el lado mayor del triángulo es el opuesto al ángulo mayor y la que denotamos por D2.

D1. *Si A, B y C son puntos del plano, entonces*

$$AB + BC \geq AC.$$

Además, la igualdad se alcanza si y sólo si B está en el segmento AC.

D2. *En un triángulo el lado mayor es el que se opone al ángulo mayor y recíprocamente.*

Así, si en el triángulo ABC se tiene que $\angle A > \angle B$, entonces $BC > CA$.

Ejercicio 2.1 (i) *Si a, b, c son números positivos con $a < b + c$, $b < c + a$ y $c < a + b$, entonces se puede encontrar un triángulo con lados de longitud a, b y c.*

(ii) *Para poder formar un triángulo con lados de longitud $a \leq b \leq c$, basta que $c < a + b$.*

(iii) *Se puede construir un triángulo con segmentos de longitud a, b, c si y sólo si existen números positivos x, y, z con $a = x + y$, $b = y + z$ y $c = z + x$.*

Ejercicio 2.2 *(i) Si con segmentos de longitud $a < b < c$ se puede construir un triángulo, entonces con segmentos de longitud $\sqrt{a} < \sqrt{b} < \sqrt{c}$ se puede armar un triángulo.*

(ii) El recíproco de (i) es falso.

(iii) Si con segmentos de longitud $a < b < c$ se puede armar un triángulo, entonces con segmentos de longitud $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$ y $\frac{1}{c+a}$ se puede formar un triángulo.

Ejercicio 2.3 *Considere los segmentos de longitud a, b, c, d y e, de manera que con cualesquiera tres de ellos se puede formar un triángulo, muestre que hay tres de ellos que forman un triángulo acutángulo.*

Algunas veces la clave para resolver un problema está en identificar ciertas cantidades con magnitudes geométricas, como sucede en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1 *Si a, b, c son números positivos con $a^2 + b^2 - ab = c^2$, muestre que $(a - b)(b - c) \leq 0$.*

Como $c^2 = a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$, podemos pensar que a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo tal que la medida del ángulo opuesto al lado de longitud c, es igual a $60°$. Los ángulos del triángulo ABC cumplen, $\angle A \leq 60°$ y $\angle B \geq 60°$, o bien $\angle A \geq 60°$ y $\angle B \leq 60°$. Por lo tanto, por la propiedad $D2$ tenemos que $a \leq c \leq b$ o bien $a \geq c \geq b$. En cualquier caso sucede que $(a - b)(b - c) \leq 0$.

Observación 2.1.2 *También se puede resolver el ejemplo anterior sin tener que identificar a, b y c con las longitudes de los lados de un triángulo.*

Supongamos primero que $a \leq b$, el que $a^2 + b^2 - ab = c^2$ implica que $a(a-b) = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$, por lo que $c - b \leq 0$ y entonces $(a - b)(b - c) \leq 0$. Análogamente, $a \geq b$ implica $c - b \geq 0$, lo que nos lleva a que

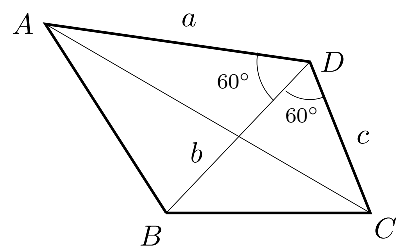
$$(a - b)(b - c) \leq 0.$$

Otro ejemplo donde no es inmediato que se trate de una desigualdad geométrica, o que el uso de la geometría ayude, se muestra a continuación.

Ejemplo 2.1.3 *Si a, b, c son números positivos, entonces*

$$\sqrt{a^2 + ac + c^2} \leq \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2}.$$

Los radicales sugieren usar la ley de los cosenos con ángulos de $120°$ y de $60°$ como sigue: $a^2 + ac + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 120°$, $a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60°$ y $b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60°$.



Entonces, si consideramos un cuadrilátero $ABCD$, con $\angle ADB = \angle BDC = 60°$ y $\angle ADC = 120°$, de manera que $AD = a$, $BD = b$ y $CD = c$, tenemos que $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ y $CA = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$. La desigualdad que debemos mostrar es la desigualdad del triángulo para el triángulo ABC.

Ejercicio 2.4 *Sea ABC un triángulo con $\angle A > \angle B$, muestre que $BC > \frac{1}{2}AB$.*

Ejercicio 2.5 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, muestre que:*

(i) *Si $AB + BD < AC + CD$ entonces $AB < AC$.*

(ii) *Si $\angle A > \angle C$ y $\angle D > \angle B$ entonces $BC > \frac{1}{2}AD$.*

Ejercicio 2.6 *Si a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 son las longitudes de los lados de un pentágono convexo y si d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 son las longitudes de sus diagonales, muestre que*

$$\frac{1}{2} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} < 1.$$

Ejercicio 2.7 *La longitud m_a de la mediana AA' de un triángulo ABC cumple que $m_a > \frac{b+c-a}{2}$.*

Ejercicio 2.8 *Si la longitud de la mediana AA' de un triángulo ABC cumple $m_a > \frac{1}{2}a$, muestre que $\angle BAC < 90^o$.*

Ejercicio 2.9 *Si AA' es la mediana del triángulo ABC y si $AB < AC$, entonces $\angle BAA' > \angle A'AC$.*

Ejercicio 2.10 *Si m_a, m_b y m_c son las longitudes de las medianas de un triángulo con lados de longitudes a, b y c, respectivamente. Muestre que se puede armar un triángulo de lados con longitudes m_a, m_b y m_c, y que*

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c.$$

Ejercicio 2.11 (Desigualdad de Ptolomeo) *Para un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple que $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$.*
La igualdad se da si y sólo si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico.

Ejercicio 2.12 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Muestre que $AC > BD$ si y sólo si $(AD - BC)(AB - DC) > 0$.*

Ejercicio 2.13 (Problema de Pompeiu) *Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto del plano que no pertenece al circuncírculo de ABC. Muestre que PA, PB y PC son las longitudes de los lados de un triángulo.*

Ejercicio 2.14 *Si $ABCD$ es un paralelogramo, muestre que*

$$\left|AB^2 - BC^2\right| < AC \cdot BD.$$

Ejercicio 2.15 *Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, m_a, m_b y m_c representan las longitudes de las medianas y R el circunradio. Muestre que:*

(i) $\dfrac{a^2+b^2}{m_c} + \dfrac{b^2+c^2}{m_a} + \dfrac{c^2+a^2}{m_b} \leq 12R.$

(ii) $m_a(bc - a^2) + m_b(ca - b^2) + m_c(ab - c^2) \geq 0.$

Ejercicio 2.16 *Sea ABC un triángulo cuyos lados tienen longitudes a, b y c. Supongamos que $c > b$, muestre que*

$$\frac{1}{2}(c-b) < m_b - m_c < \frac{3}{2}(c-b),$$

donde m_b y m_c son las longitudes de las medianas.

Ejercicio 2.17 *(Irán, 2005) Sea ABC un triángulo con $\angle A = 90^\circ$. Sea D la intersección de la bisectriz interna del $\angle A$ con el lado BC y sea I_a el centro de la circunferencia excrita al triángulo ABC opuesta al vértice A. Muestre que*

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{2} - 1.$$

2.2. Desigualdades entre los lados de un triángulo

Las desigualdades entre las longitudes de los lados de un triángulo aparecen frecuentemente como problemas en los concursos. Un tipo de problemas son los que piden demostrar una desigualdad que satisfacen las longitudes de los lados del triángulo y no hay más elementos geométricos involucrados, como es el siguiente.

Ejemplo 2.2.1 *Las longitudes de los lados a, b y c de un triángulo cumplen que*

$$a\,(b+c-a) < 2bc.$$

Como la desigualdad es simétrica en b y c podemos suponer, sin perder generalidad, que $c \leq b$. Estudiaremos la desigualdad en casos:
Caso 1. $a \leq b$.
Por ser la longitud de los lados de un triángulo tenemos que $b < a+c$; luego

$$b+c-a = b-a+c < c+c = 2c \leq \frac{2bc}{a}.$$

Caso 2. $a \geq b$.
Aquí resulta que $b-a \leq 0$, y como $a < b+c \leq 2b$, tenemos que

$$b+c-a = c+b-a \leq c < \frac{2bc}{a}.$$

Otro tipo de problemas para las longitudes de los lados de un triángulo, son aquellos donde se pide demostrar que cierta relación entre los números a, b y c es suficiente para construir un triángulo con lados de longitud a, b y c.

Ejemplo 2.2.2 *(i) Si a, b, c son números positivos y satisfacen, $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 > 2\left(a^4+b^4+c^4\right)$, entonces a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo.*
(ii) Si a, b, c, d son números positivos y satisfacen

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2 > 3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right),$$

entonces con cualesquiera tres de ellos se puede formar un triángulo.

Para la parte (i) basta observar que,

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right) = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) > 0$$

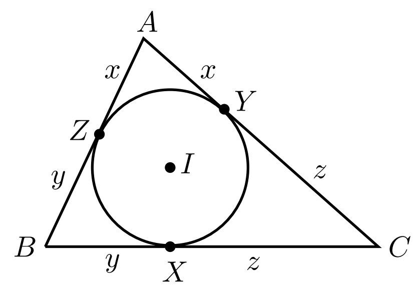
y notar que de estos factores ninguno es negativo, compare con el ejemplo 1.2.5.

Para la parte (ii), tenemos que

$$\begin{aligned}
3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right) &< \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2\\
&= \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+d^2\right)^2\\
&\leq \left\{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2+d^4\right\}\left(\sqrt{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz; luego $a^4+b^4+c^4 < 2\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{4}$. Por la primera parte tenemos que con a, b y c se puede formar un triángulo. Como el argumento utilizado es simétrico en a, b, c y d, tenemos el resultado.

Existe una técnica que ayuda a transformar una desigualdad entre las longitudes de los lados de un triángulo en una desigualdad entre números positivos (desde luego relacionados con los lados), llamada la **transformación de Ravi**.
Si el incírculo (I, r) del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos X, Y y Z, respectivamente, tenemos que, $x = AZ = YA$, $y = ZB = BX$, $z = XC = CY$.



Es claro que $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, $x = s-a$, $y = s-b$ y $z = s-c$, donde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Veamos como usar la transformación de Ravi en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.3 *Las longitudes de los lados a, b y c de un triángulo cumplen que*

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc.$$

Primero tenemos que

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 8(s-a)(s-b)(s-c) = 8xyz,$$

por otro lado

$$abc = (x+y)(y+z)(z+x).$$

Luego, la desigualdad es equivalente a

$$8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x), \tag{2.1}$$

que sabemos que es válida por el ejercicio 1.26.

Ejemplo 2.2.4 *(APMO, 1996) Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.*

Como $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, podemos deducir $a+b-c = 2z$, $b+c-a = 2x$, $c+a-b = 2y$. Luego, la desigualdad es equivalente a

$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}.$$

Ahora usando la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática (vea ejercicio 1.68), obtenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} &= \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2} \\
&\leq \sqrt{\frac{2x+2y}{2}}+\sqrt{\frac{2y+2z}{2}}+\sqrt{\frac{2z+2x}{2}} \\
&= \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}.
\end{aligned}$$

Además, la igualdad se tiene si y sólo si $x = y = z$, es decir, si y sólo si $a = b = c$.

También, es posible expresar el área de un triángulo ABC, su inradio, su circunradio y su semiperímetro en términos de x, y, z. Como $a = x+y$, $b = y+z$ y $c = z+x$, se obtiene primero que $s = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z$. Usando la fórmula de Herón para el área de un triángulo se obtiene

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}. \tag{2.2}$$

Usando la fórmula $(ABC) = sr$, vemos que

$$r = \frac{(ABC)}{s} = \frac{\sqrt{(x+y+z)xyz}}{x+y+z} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}.$$

Finalmente, de $(ABC) = \frac{abc}{4R}$ se tiene

$$R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}.$$

Ejemplo 2.2.5 *(India, 2003) Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si construimos un triángulo $A'B'C'$ con lados de longitud $a+\frac{b}{2}$, $b+\frac{c}{2}$, $c+\frac{a}{2}$, muestre que $(A'B'C') \geq \frac{9}{4}(ABC)$.*

Como $a = y+z$, $b = z+x$ y $c = x+y$, se tiene que las longitudes de los lados del triángulo $A'B'C'$ son $a' = \frac{x+2y+3z}{2}$, $b' = \frac{3x+y+2z}{2}$, $c' = \frac{2x+3y+z}{2}$. Usando la fórmula de Herón para el área de un triángulo se obtiene

$$(A'B'C') = \sqrt{\frac{3(x+y+z)(2x+y)(2y+z)(2z+x)}{16}}.$$

Aplicando la desigualdad entre la $MG-MA$ podemos establecer que $2x+y \geq 3\sqrt[3]{x^2y}$, $2y+z \geq 3\sqrt[3]{y^2z}$ y $2z+x \geq 3\sqrt[3]{z^2x}$, lo que nos ayudará a tener la siguiente desigualdad

$$(A'B'C') \geq \sqrt{\frac{3(x+y+z)27(xyz)}{16}} = \frac{9}{4}(ABC),$$

donde la última igualdad es consecuencia directa de la ecuación (2.2).

Ejercicio 2.18 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca).$$

Ejercicio 2.19 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca).$$

Ejercicio 2.20 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq (a+b+c)^2.$$

Ejercicio 2.21 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Ejercicio 2.22 *(IMO, 1964) Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Ejercicio 2.23 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(c^2+a^2-b^2\right)+c\left(a^2+b^2-c^2\right)\leq 3abc.$$

Ejercicio 2.24 *(IMO, 1983) Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Ejercicio 2.25 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<\frac{1}{8}.$$

Ejercicio 2.26 *Las longitudes de los lados de un triángulo a, b y c, satisfacen $ab+bc+ca=3$, muestre que*

$$3\leq a+b+c\leq 2\sqrt{3}.$$

Ejercicio 2.27 *Sean a,b,c las longitudes de los lados de un triángulo y r el inradio del triángulo, muestre que*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{\sqrt{3}}{2r}.$$

Ejercicio 2.28 *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y s el semiperímetro, muestre que:*

(i) $(s-a)(s-b)<ab$,

(ii) $(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\leq\dfrac{ab+bc+ca}{4}$.

Ejercicio 2.29 *Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo acutángulo, muestre que*

$$\sum_{\text{cíclica}}\sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2}\leq a^2+b^2+c^2,$$

donde $\sum_{\textit{cíclica}}$ *significa la suma sobre las permutaciones cíclicas,* (a, b, c), (b, c, a) *y* (c, a, b), *de* (a, b, c).

Ejercicio 2.30 *Si* a, b, c *son las longitudes de los lados de un triángulo acutángulo, muestre que*

$$\sum_{\textit{cíclica}} \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}\sqrt{a^2 - b^2 + c^2} \leq ab + bc + ca,$$

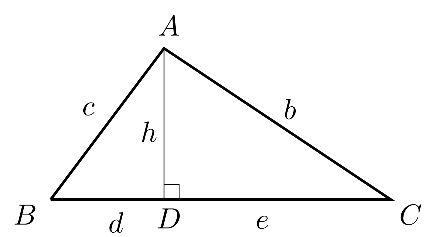
donde $\sum_{\textit{cíclica}}$ *significa la suma sobre las permutaciones cíclicas,* (a, b, c), (b, c, a) *y* (c, a, b), *de* (a, b, c).

2.3. Uso de desigualdades en la geometría del triángulo

Un problema que ayuda a ejemplificar el uso de las desigualdades en la geometría es el problema 2 que se planteó en la Olimpiada Internacional de Matemáticas en 1961. De éste existen varias pruebas y también sus aplicaciones son diversas como veremos más adelante. Por ahora lo presentamos como un ejemplo.

Ejemplo 2.3.1 *Si* a, b *y* c *son las longitudes de los lados de un triángulo de área* (ABC), *entonces* $4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Como un triángulo equilátero con lado de longitud a tiene área igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, la igualdad se alcanza en tal caso; trataremos entonces de comparar lo que sucede en un triángulo en general con lo que pasa, al respecto, en un triángulo equilátero con lado de longitud a.



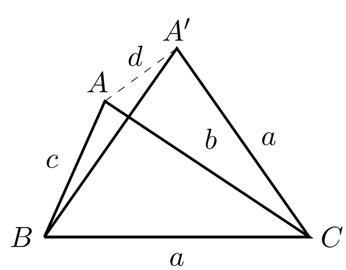
Sea $BC = a$. Si AD es la altura de un triángulo desde A, su longitud h la podemos escribir como $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a + y$, donde y mide su defecto con respecto a la longitud de la altura del triángulo equilátero. También escribimos $d = \frac{a}{2} - x$ y $e = \frac{a}{2} + x$, donde x se puede interpretar como el defecto o la diferencia, que la proyección de A en BC tiene, con respecto a la proyección de A en BC en el triángulo equilátero, que en tal caso es el punto medio del lado BC. Tenemos que

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}(ABC) = a^2 + h^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + h^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 - 4\sqrt{3}\frac{ah}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}a^2 + 2h^2 + 2x^2 - 2\sqrt{3}\,a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + y\right) \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + y\right)^2 + 2x^2 - 3a^2 - 2\sqrt{3}ay \\
&= \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 + 2\sqrt{3}ay + 2y^2 + 2x^2 - 3a^2 - 2\sqrt{3}ay \\
&= 2(x^2 + y^2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Además, la igualdad se da si y sólo si $x = y = 0$, es decir, cuando el triángulo es equilátero.

Veamos otra demostración del ejemplo anterior. Sea ABC el triángulo con lados de longitud $a \geq b \geq c$, y sea A' un punto de manera que $A'BC$ sea un triángulo equilátero con lados de longitud a. Llamemos $d = AA'$, entonces d mide de alguna manera el defecto que tiene ABC con respecto al triángulo equilátero.



Por la ley de los cosenos, tenemos que

$$\begin{aligned}
d^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(B - 60^\circ) \\
&= a^2 + c^2 - 2ac(\cos B \cos 60^\circ + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} 60^\circ) \\
&= a^2 + c^2 - ac\cos B - 2\sqrt{3}\frac{ac \operatorname{sen} B}{2} \\
&= a^2 + c^2 - ac\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) - 2\sqrt{3}(ABC) \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2\sqrt{3}(ABC).
\end{aligned}$$

Pero $d^2 \geq 0$, luego tenemos que $4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2$, como deseábamos. Además, la igualdad se da si $d = 0$, esto es si $A' = A$ o, equivalentemente, si ABC es equilátero.

Es común encontrar entre los problemas de olimpiadas desigualdades que involucran elementos de un triángulo. Algunas de ellas son consecuencia de la siguiente desigualdad, válida para números positivos a, b, c, (ver ejercicio 1.36 de la sección 1.3).

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9. \tag{2.3}$$

Además, recordemos que se da la igualdad si y sólo si $a = b = c$.

Otra desigualdad que ha resultado muy útil para problemas de geometría, es la desigualdad de Nesbitt, (ver ejemplo 1.4.8 de la sección 1.4). Ésta dice que para números positivos a, b, c, siempre se tiene

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{2.4}$$

La desigualdad anterior se puede demostrar, usando la desigualdad (2.3) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \\
&= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\
&= \frac{1}{2}\left[(a+b) + (b+c) + (c+a)\right] \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\
&\geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

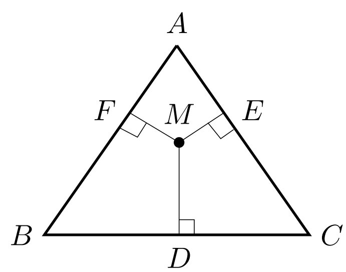
La igualdad se da si y sólo si $a+b=b+c=c+a$, o equivalentemente, si $a=b=c$.

Veamos ahora una serie de ejemplos de desigualdades geométricas donde tales relaciones se utilizan.

Ejemplo 2.3.2 *Sea ABC un triángulo equilátero con lados de longitud a; sea M un punto dentro de ABC y D, E, F las proyecciones de M sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Muestre que:*

(i) $\dfrac{1}{MD}+\dfrac{1}{ME}+\dfrac{1}{MF}\geq\dfrac{6\sqrt{3}}{a}$,

(ii) $\dfrac{1}{MD+ME}+\dfrac{1}{ME+MF}+\dfrac{1}{MF+MD}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{a}$.



Sean $x=MD$, $y=ME$ y $z=MF$. Si denotamos por (ABC) al área del triángulo ABC, tenemos que $(ABC)=(BCM)+(CAM)+(ABM)$, por lo que $ah=ax+ay+az$, donde $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ es la longitud de la altura de ABC. Por lo tanto, $h=x+y+z$ (este resultado es conocido como el lema de Viviani, ver la sección 2.8). Por la desigualdad (2.3) tenemos que

$$h\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9,\quad \text{despejando,}\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{h}=\frac{6\sqrt{3}}{a}.$$

Para demostrar la segunda parte, observemos que de la desigualdad (2.3), tenemos que

$$(x+y+y+z+z+x)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\geq 9.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{9}{2h}=\frac{3\sqrt{3}}{a}$.

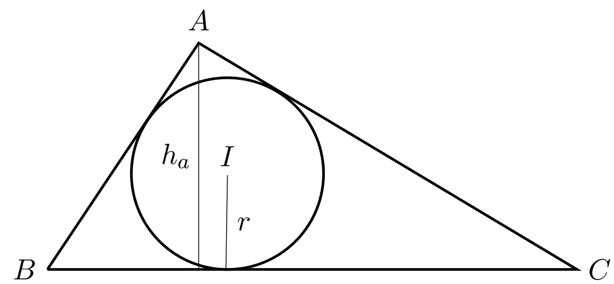
Ejemplo 2.3.3 *Si h_a, h_b y h_c son las longitudes de las alturas de un triángulo ABC que tiene incírculo de centro I y radio r, tenemos:*

(i) $\dfrac{r}{h_a} + \dfrac{r}{h_b} + \dfrac{r}{h_c} = 1,$

(ii) $h_a + h_b + h_c \geq 9r.$

Para demostrar la primera ecuación, observemos que $\frac{r}{h_a} = \frac{r \cdot a}{h_a \cdot a} = \frac{(IBC)}{(ABC)}$. De manera análoga, $\frac{r}{h_b} = \frac{(ICA)}{(ABC)}$, $\frac{r}{h_c} = \frac{(IAB)}{(ABC)}$, sumando

$$\begin{aligned} \frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} &= \frac{(IBC)}{(ABC)} + \frac{(ICA)}{(ABC)} + \frac{(IAB)}{(ABC)} \\ &= \frac{(IBC) + (ICA) + (IAB)}{(ABC)} = 1. \end{aligned}$$



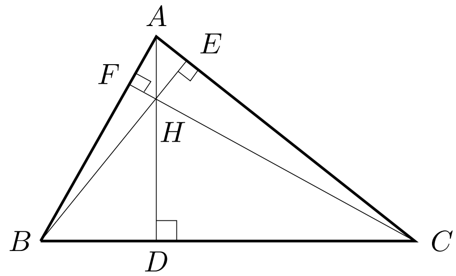
La desigualdad es consecuencia directa de la desigualdad (2.3), ya que

$$(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \cdot r \geq 9r.$$

Ejemplo 2.3.4 *Sea ABC un triángulo con alturas AD, BE, CF y sea H el ortocentro. Muestre que:*

(i) $\dfrac{AD}{HD} + \dfrac{BE}{HE} + \dfrac{CF}{HF} \geq 9,$

(ii) $\dfrac{HD}{HA} + \dfrac{HE}{HB} + \dfrac{HF}{HC} \geq \dfrac{3}{2}.$



Para demostrar el inciso (i), consideremos $S = (ABC)$, $S_1 = (HBC)$, $S_2 = (HCA)$, $S_3 = (HAB)$. Como los triángulos ABC y HBC tienen la misma base, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus alturas, es decir, $\frac{S_1}{S} = \frac{HD}{AD}$. Análogamente, $\frac{S_2}{S} = \frac{HE}{BE}$ y $\frac{S_3}{S} = \frac{HF}{CF}$. Luego, $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

Usando la desigualdad (2.3), tenemos

$$\left(\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF}\right)\left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}\right) \geq 9.$$

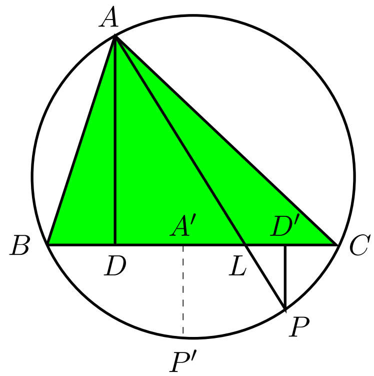
Al sustituir aquí la igualdad que calculamos obtenemos (i).

Más aún, la igualdad se da si y sólo si $\frac{HD}{AD} = \frac{HE}{BE} = \frac{HF}{CF} = \frac{1}{3}$, o lo que es lo mismo, $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S$. Para demostrar la segunda parte observemos que, $\frac{HD}{HA} = \frac{HD}{AD-HD} = \frac{S_1}{S-S_1} = \frac{S_1}{S_2+S_3}$ y análogamente, $\frac{HE}{HB} = \frac{S_2}{S_3+S_1}$, $\frac{HF}{HC} = \frac{S_3}{S_1+S_2}$, entonces por la desigualdad de Nesbitt tenemos que $\frac{HD}{HA} + \frac{HE}{HB} + \frac{HF}{HC} \geq \frac{3}{2}$.

Ejemplo 2.3.5 *(Corea, 1995) Sean ABC un triángulo y L, M, N puntos sobre BC, CA y AB, respectivamente. Sean P, Q y R los puntos de intersección de las líneas AL, BM y CN con el circuncírculo de ABC, respectivamente. Muestre que*

$$\frac{AL}{LP} + \frac{BM}{MQ} + \frac{CN}{NR} \geq 9.$$

Sean A' el punto medio de BC, P' el punto medio del arco BC, D y D' las proyecciones de A y P sobre BC, respectivamente.



Es claro que, $\frac{AL}{LP} = \frac{AD}{PD'} \geq \frac{AD}{P'A'}$. Luego, el valor mínimo de $\frac{AL}{LP} + \frac{BM}{MQ} + \frac{CN}{NR}$ se obtiene cuando P, Q y R son los puntos medios de los arcos BC, CA y AB, respectivamente. Esto sucederá cuando AL, BM y CN sean las bisectrices internas del triángulo ABC. Por lo que, sin perder generalidad, supondremos que AL, BM y CN son las bisectrices internas de ABC. Como AL es bisectriz interna, se tiene que[1]

$$BL = \frac{ca}{b+c}, \quad LC = \frac{ba}{b+c} \quad \text{y} \quad AL^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right).$$

Además,

$$\frac{AL}{LP} = \frac{AL^2}{AL \cdot LP} = \frac{AL^2}{BL \cdot LC} = \frac{(bc)\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)}{\frac{a^2bc}{(b+c)^2}} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{a^2}.$$

Análogamente, para las bisectrices BM y CN, se tiene

$$\frac{BM}{MQ} = \frac{(c+a)^2 - b^2}{b^2} \quad \text{y} \quad \frac{CN}{NR} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{c^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{AL}{LP} + \frac{BM}{MQ} + \frac{CN}{NR} &= \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 3 \\
&\geq \frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right)^2 - 3 \\
&\geq \frac{1}{3}(6)^2 - 3 = 9.
\end{aligned}$$

[1]Ver teorema de la bisectriz y ejercicio 2.8.17 del capítulo 2 en [6], pág.74 y 105 o [9], pág.10 y 11.

La primera desigualdad se sigue de la convexidad de la función $f(x) = x^2$, y la segunda desigualdad de relaciones de la forma $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$. Observemos que la igualdad se da si y sólo si $a = b = c$.
Otra manera de terminar el problema es como sigue,

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 3 =$$

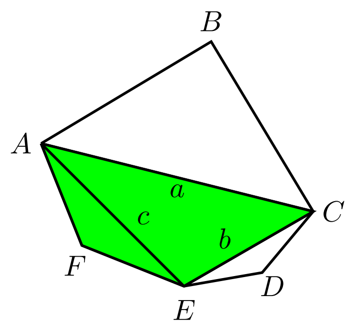
$$= \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) + 2\left(\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}\right) - 3$$

$$\geq 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 3 = 9.$$

Aquí usamos el hecho que $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2$ y que $\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(ab)(bc)(ca)}{a^2b^2c^2}} = 3$.

Ejemplo 2.3.6 *(Lista corta IMO, 1997) Las longitudes de los lados de un hexágono $ABCDEF$ satisfacen $AB = BC$, $CD = DE$ y $EF = FA$. Muestre que*

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$



Sean $a = AC$, $b = CE$ y $c = EA$. La desigualdad de Ptolomeo (ver ejercicio 2.11), aplicada en el cuadrilátero $ACEF$, nos garantiza que $AE \cdot FC \leq FA \cdot CE + AC \cdot EF$. Como $EF = FA$, tenemos entonces $c \cdot FC \leq FA \cdot b + FA \cdot a$. Por lo tanto,

$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}.$$

Análogamente, se puede ver que

$$\frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c} \qquad \text{y} \qquad \frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{c+a}.$$

Por tanto, $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$. La última desigualdad es la desigualdad de Nesbitt, que sabemos es cierta.

Ejercicio 2.31 *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que:*

(i) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geq 3$,

(ii) $\dfrac{b+c-a}{a}+\dfrac{c+a-b}{b}+\dfrac{a+b-c}{c}\geq 3$.

Ejercicio 2.32 *Sean AD, BE, CF las alturas de un triángulo ABC y PQ, PR, PS las distancias de un punto P a los lados BC, CA, AB, respectivamente. Muestre que*

$$\frac{AD}{PQ}+\frac{BE}{PR}+\frac{CF}{PS}\geq 9.$$

Ejercicio 2.33 *Tres líneas se trazan por un punto O que se localiza dentro de un triángulo de área S de manera que cada lado es cortado por dos de éstas. Las líneas dividen al triángulo en tres triángulos con vértice común O y áreas S_1, S_2 y S_3, además de tres cuadriláteros. Muestre que:*

(i) $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}\geq\dfrac{9}{S}$,

(ii) $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}\geq\dfrac{18}{S}$.

Ejercicio 2.34 *Tres cevianas AL, BM, CN de un triángulo ABC son concurrentes en un punto P. Muestre que, $\frac{AP}{PL}+\frac{BP}{PM}+\frac{CP}{PN}=6$ si y sólo si P es el centroide.*

Ejercicio 2.35 *Las alturas AD, BE, CF intersectan al circuncírculo del triángulo ABC en D', E' y F', respectivamente. Muestre que:*

(i) $\dfrac{AD}{DD'}+\dfrac{BE}{EE'}+\dfrac{CF}{FF'}\geq 9$,

(ii) $\dfrac{AD}{AD'}+\dfrac{BE}{BE'}+\dfrac{CE}{CF'}\geq\dfrac{9}{4}$.

Ejercicio 2.36 *Sea ABC un triángulo y sean l_a, l_b, l_c las longitudes de las bisectrices internas, s el semiperímetro y r el inradio de tal triángulo. Muestre que:*

(i) $l_a l_b l_c \leq rs^2$.

(ii) $l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a \leq s^2$.

(iii) $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq s^2$.

Ejercicio 2.37 *Sea ABC un triángulo y sean M, N, P puntos arbitrarios en los segmentos BC, CA, BA, respectivamente. Denote las longitudes de los lados del triángulo por a, b, c y el circunradio por R. Muestre que*

$$\frac{bc}{AM} + \frac{ca}{BN} + \frac{ab}{CP} \leq 6R.$$

Ejercicio 2.38 *Sea ABC un triángulo con lados de longitud a, b y c. Sean m_a, m_b y m_c las longitudes de las medianas desde A, B y C, respectivamente. Muestre que*

$$\text{máx}\{a\,m_a, b\,m_b, c\,m_c\} \leq sR,$$

donde R es el radio del circuncírculo y s el semiperímetro.

2.4. La desigualdad de Euler y algunas aplicaciones

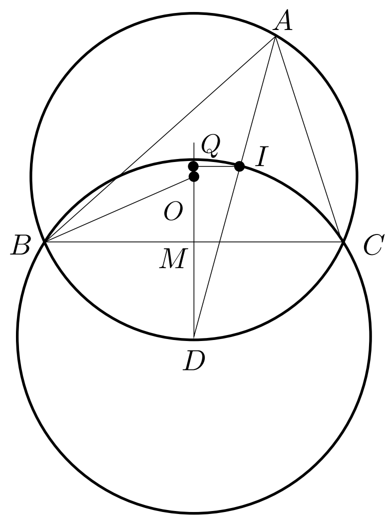
Teorema 2.4.1 (Teorema de Euler) *Si en un triángulo ABC, O es su circuncentro, I su incentro, R su circunradio y r su inradio, entonces*

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Demostración. Veamos una demostración[2] que solamente depende del teorema de Pitágoras y del hecho de que el circuncírculo del triángulo BCI tiene centro D, donde D es el punto medio del arco BC[3]. En la demostración usaremos segmentos dirigidos.

[2] Otra demostración puede verse en [6], pág. 122 o [9], pág. 29.

[3] La demostración puede verse en [6], observación 3.2.7, pág. 123 o [1], pág. 76.



Sean M el punto medio de BC y Q la proyección ortogonal de I sobre el radio OD. Entonces

$$\begin{aligned}
OB^2 - OI^2 &= OB^2 - DB^2 + DI^2 - OI^2 \\
&= OM^2 - MD^2 + DQ^2 - QO^2 \\
&= (MO + DM)(MO - DM) + (DQ + QO)(DQ - QO) \\
&= DO(MO + MD + DQ + OQ) \\
&= R(2MQ) = 2Rr.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Como una consecuencia del teorema anterior tenemos la siguiente desigualdad,

Teorema 2.4.2 (Desigualdad de Euler) $R \geq 2r$. *Además,* $R = 2r$ *si y sólo si el triángulo es equilátero*[4].

Teorema 2.4.3 *En un triángulo* ABC, *con circunradio* R, *inradio* r *y semiperímetro* s, *se tiene*

$$r \leq \frac{s}{3\sqrt{3}} \leq \frac{R}{2}.$$

[4]Existen demostraciones directas de la desigualdad (esto es, sin utilizar la fórmula de Euler). Una de ellas es la siguiente: el círculo de los nueve puntos de un triángulo es el circuncírculo del triángulo medial $A'B'C'$, como este triángulo es semejante a ABC en razón 2:1, se tiene que el radio del círculo de los nueve puntos es $\frac{R}{2}$. Claramente una circunferencia que corta a los tres lados del triángulo debe tener radio mayor que el radio del incírculo, luego $\frac{R}{2} \geq r$.

Demostración. Usaremos que[5], $(ABC) = \frac{abc}{4R} = sr$. Por la desigualdad $MG-MA$, tenemos que $2s = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{4Rrs}$. Luego, $8s^3 \geq 27(4Rrs) \geq 27(8r^2s)$, ya que $R \geq 2r$. Por lo tanto, $s \geq 3\sqrt{3}r$.

La segunda desigualdad, $\frac{s}{3\sqrt{3}} \leq \frac{R}{2}$, es equivalente a $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$. Pero ésta, utilizando la ley de los senos, es equivalente a $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Observemos que esta última desigualdad es verdadera, ya que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es cóncava en $[0, \pi]$, entonces $\frac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} C}{3} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicio 2.39 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

Ejercicio 2.40 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2},$$

donde R denota el circunradio.

Ejercicio 2.41 *Sean A, B y C las medidas de los ángulos en cada uno de los vértices del triángulo ABC, muestre que*

$$\frac{1}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} + \frac{1}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} + \frac{1}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} A} \geq 4.$$

Ejercicio 2.42 *Sean A, B y C las medidas de los ángulos en cada uno de los vértices del triángulo ABC, muestre que*

$$\left(\operatorname{sen}\frac{A}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{8}.$$

Ejercicio 2.43 *Sea ABC un triángulo. Llamamos a los ángulos en los vértices en A, B, C, de la misma forma, es decir, A, B, C, respectivamente. Sean a, b y c las longitudes de los lados del triángulo y sea R el radio del circuncírculo. Muestre que*

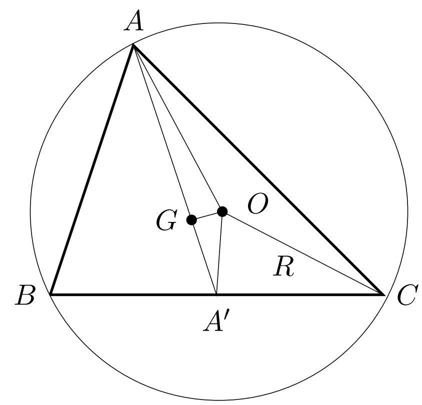
$$\left(\frac{2A}{\pi}\right)^{\frac{1}{a}}\left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{b}}\left(\frac{2C}{\pi}\right)^{\frac{1}{c}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{R}}.$$

[5]Consultar [6], pág. 97 o [9], pág. 13.

Teorema 2.4.4 (Teorema de Leibniz) *En un triángulo ABC con lados de longitud a, b y c, y con circuncentro O, centroide G y circunradio R, se cumple que*

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Demostración. Usaremos el teorema de Stewart que dice[6] que, si L es un punto sobre el lado BC de un triángulo ABC y si $AL = l$, $BL = m$, $LC = n$, entonces $a\left(l^2 + mn\right) = b^2 m + c^2 n$.



Aplicando el teorema de Stewart al triángulo OAA' para encontrar la longitud de OG, donde A' es el punto medio de BC, obtenemos

$$AA'\left(OG^2 + AG \cdot GA'\right) = A'O^2 \cdot AG + AO^2 \cdot GA'.$$

Como

$$AO = R, \quad AG = \frac{2}{3}AA' \quad \text{y} \quad GA' = \frac{1}{3}AA',$$

sustituyendo tenemos

$$OG^2 + \frac{2}{9}(A'A)^2 = A'O^2 \cdot \frac{2}{3} + R^2 \cdot \frac{1}{3}.$$

[6] Para la demostración véase [6], pág. 96 o [9], pág. 6.

Por otro lado[7], $(A'A)^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ y $A'O^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$, tenemos que

$$\begin{aligned} OG^2 &= \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right)\frac{2}{3} + \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9}\left(\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}\right) \\ &= R^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{18} \\ &= R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}. \end{aligned}$$

Una consecuencia del teorema anterior es la desigualdad siguiente.

Teorema 2.4.5 (Desigualdad de Leibniz) *En un triángulo ABC, con lados de longitud a, b y c, con circunradio R, se cumple que*

$$9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Además, la igualdad se da si y sólo si $O = G$, es decir, cuando el triángulo es equilátero.

Ejemplo 2.4.6 *En un triángulo ABC con lados de longitud a, b y c, y de área (ABC), se tiene que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq \frac{9abc}{a+b+c}.$$

Usando que $4R(ABC) = abc$, tenemos las siguientes equivalencias

$$9R^2 \geq a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2c^2}{16(ABC)^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{9} \Leftrightarrow 4(ABC) \leq \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos garantiza que $a+b+c \leq \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, por lo que

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq \frac{9abc}{a+b+c}.$$

Ejercicio 2.44 *Sean A, B y C las medidas de los ángulos en cada uno de los vértices del triángulo ABC, muestre que*

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

[7] Consultar [6], pág. 83 o [9], pág. 10.

Ejercicio 2.45 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Ejercicio 2.46 *Suponga que el incírculo de ABC es tangente a los lados BC, CA, AB, en D, E, F, respectivamente. Muestre que*

$$EF^2 + FD^2 + DE^2 \leq \frac{s^2}{3},$$

donde s es el semiperímetro de ABC.

Ejercicio 2.47 *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo ABC y sean h_a, h_b, h_c las longitudes de las alturas sobre A, B, C, respectivamente. Muestre que*

$$\frac{a^2}{h_bh_c} + \frac{b^2}{h_ch_a} + \frac{c^2}{h_ah_b} \geq 4.$$

2.5. Funciones simétricas de a, b y c

Las longitudes de los lados a, b y c de un triángulo tienen una relación muy estrecha con s, r y R el semiperímetro, el inradio y el circunradio del triángulo, respectivamente. Las relaciones más usadas son:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2s && (2.5)\\ ab+bc+ca &= s^2+r^2+4rR && (2.6)\\ abc &= 4Rrs. && (2.7) \end{aligned}$$

La primera es la definición de s y la tercera se sigue de que el área de un triángulo es $\frac{abc}{4R} = rs$. Usando la fórmula de Herón para el área de un triángulo tenemos la relación $s(s-a)(s-b)(s-c) = r^2s^2$, por lo que

$$s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc = r^2s.$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.5) y (2.7) en esta igualdad, y despejando obtenemos que

$$ab+bc+ca = s^2+r^2+4Rr.$$

Ahora bien, como cualquier polinomio simétrico en a, b y c se puede expresar como un polinomio en términos de $(a+b+c)$, $(ab+bc+ca)$ y (abc), también lo podemos expresar como un polinomio en s, r y R. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 2\left(s^2-r^2-4Rr\right), \\ a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc \\ &= 2\left(s^3-3r^2s-6Rrs\right). \end{aligned}$$

Estas transformaciones ayudan a resolver diversos problemas como veremos más adelante.

Lema 2.5.1 *Si A, B y C son las medidas de los ángulos en cada uno de los vértices del triángulo ABC, se tiene que* $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= \frac{a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)}{2abc} \\ &= \frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(a^3+b^3+c^3)}{2abc} \\ &= \frac{4s\left(s^2-r^2-4Rr\right)-4\left(s^3-3r^2s-6Rrs\right)}{8Rrs} \\ &= \frac{\left(s^2-r^2-4Rr\right)-(s^2-3r^2-6Rr)}{2Rr} \\ &= \frac{2r^2+2Rr}{2Rr} = \frac{r}{R}+1. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.5.2 *Sean A, B y C los ángulos en cada uno de los vértices del triángulo ABC, muestre que* $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

El lema 2.5.1 nos garantiza que $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1$, y usando la desigualdad de Euler, $R \geq 2r$, tenemos el resultado.

Podemos dar otra demostración directa. Observemos que,

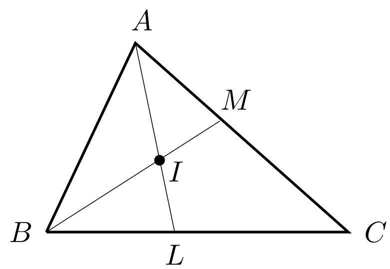
$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2) = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+2abc.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2abc}+1,\end{aligned}$$

y como $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leq abc$, se tiene el resultado.

Ejemplo 2.5.3 *(IMO, 1991) Sean ABC un triángulo, I su incentro y L, M, N las intersecciones de las bisectrices en A, B, C con BC, CA, AB, respectivamente. Muestre que $\frac{1}{4}<\frac{AI}{AL}\frac{BI}{BM}\frac{CI}{CN}\leq\frac{8}{27}$.*



El teorema de la bisectriz nos asegura que $\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{CA}=\frac{c}{b}$ y, como $BL+LC=a$, se tiene que $BL=\frac{ac}{b+c}$ y $LC=\frac{ab}{b+c}$. El mismo teorema de la bisectriz aplicado a la bisectriz BI del ángulo $\angle ABL$, garantiza que $\frac{IL}{AI}=\frac{BL}{AB}=\frac{ac}{(b+c)c}=\frac{a}{b+c}$. Por lo que,

$$\frac{AL}{AI}=\frac{AI+IL}{AI}=1+\frac{IL}{AI}=1+\frac{a}{b+c}=\frac{a+b+c}{b+c}.$$

Luego, $\frac{AI}{AL}=\frac{b+c}{a+b+c}$[8]. Análogamente, $\frac{BI}{BM}=\frac{c+a}{a+b+c}$ y $\frac{CI}{CN}=\frac{a+b}{a+b+c}$. Así, la desigualdad que se pide demostrar en términos de a, b y c, es

$$\frac{1}{4}<\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3}\leq\frac{8}{27}.$$

La desigualdad $MG-AM$ nos garantiza que

$$(b+c)(c+a)(a+b)\leq\left(\frac{(b+c)+(c+a)+(a+b)}{3}\right)^3=\frac{8}{27}(a+b+c)^3,$$

por lo que la desigualdad de la derecha que debemos demostrar es ahora evidente.

[8]Otra forma de ver la identidad es como sigue: Considere $\alpha=(ABI)$, $\beta=(BCI)$ y $\gamma=(CAI)$, es claro que, $\frac{AI}{AL}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{r(c+b)}{r(a+c+b)}=\frac{c+b}{a+c+b}$.

Para demostrar la desigualdad de la izquierda, notemos primero que

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}{(a+b+c)^3}.$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3} &= \frac{2s(s^2+r^2+4Rr)-4Rrs}{8s^3}\\ &= \frac{2s^3+2sr^2+4Rrs}{8s^3} = \frac{1}{4}+\frac{2r^2+4Rr}{8s^2} > \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Podemos usar también la transformación de Ravi con $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, para concluir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3} &= \frac{(x+y+z+x)(x+y+z+y)(x+y+z+z)}{8(x+y+z)^3}\\ &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{x+y+z}\right)\left(1+\frac{y}{x+y+z}\right)\left(1+\frac{z}{x+y+z}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{x+y+z}{x+y+z}+\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}+\frac{xyz}{x+y+z}\right) > \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ejercicio 2.48 *Sean A, B y C las medidas de los ángulos en cada uno de los vértices del triángulo ABC, muestre que*

$$\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 2.49 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y (ABC) el área del triángulo. Con la herramienta estudiada en esta sección muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq \frac{9abc}{a+b+c}.$$

Ejercicio 2.50 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y (ABC) el área del triángulo, con la herramienta estudiada en esta sección, muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Ejercicio 2.51 *(IMO, 1961) Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y (ABC) el área del triángulo, muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Ejercicio 2.52 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y (ABC) el área del triángulo, muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2.$$

Ejercicio 2.53 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y (ABC) el área del triángulo, muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq ab + bc + ca.$$

Ejercicio 2.54 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y (ABC) el área del triángulo, muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq \frac{3(a+b+c)abc}{ab+bc+ca}.$$

Ejercicio 2.55 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Si $a+b+c=1$, muestre que*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2.56 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, R el circunradio y r el inradio, muestre que*

$$\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc} = \frac{2r}{R}.$$

Ejercicio 2.57 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y R el circunradio, muestre que*

$$3\sqrt{3}R \leq \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c}.$$

Ejercicio 2.58 *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y (ABC) el área del triángulo. Tomemos como siempre $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{c+a-b}{2}$ y $z = \frac{a+b-c}{2}$. Si $\tau_1 = x+y+z$, $\tau_2 = xy+yz+zx$ y $\tau_3 = xyz$, verifique las siguientes relaciones:*

(1) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 2(\tau_1^2-3\tau_2)$.

(2) $a+b+c = 2\tau_1$.

(3) $a^2+b^2+c^2 = 2\tau_1^2 - 2\tau_2$.

(4) $ab+bc+ca = \tau_1^2+\tau_2$.

(5) $abc = \tau_1\tau_2 - \tau_3$.

(6) $16(ABC)^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4) = 16r^2s^2 = 16\tau_1\tau_3$.

(7) $R = \dfrac{\tau_1\tau_2-\tau_3}{4\sqrt{\tau_1\tau_3}}$.

(8) $r = \sqrt{\dfrac{\tau_3}{\tau_1}}$.

(9) $\tau_1 = s$, $\tau_2 = r(4R+r)$, $\tau_3 = r^2 s$.

2.6. Desigualdades con áreas y perímetros

Empezamos esta sección con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.6.1 *(Austria-Polonia, 1985) Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo de área 1, entonces*

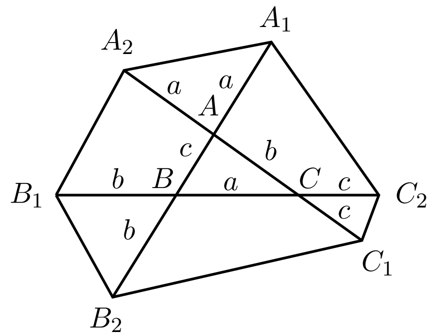
$$AB+BC+CD+DA+AC+BD \geq 4+\sqrt{8}.$$

Sean $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ y $f = BD$. El área del cuadrilátero $ABCD$ es $(ABCD) = \frac{ef\,\mathrm{sen}\,\theta}{2}$, donde θ es el ángulo entre las diagonales, luego es claro que, $1 = \frac{ef\,\mathrm{sen}\,\theta}{2} \leq \frac{ef}{2}$.

Como $(ABC) = \frac{ab\,\mathrm{sen}\,B}{2} \leq \frac{ab}{2}$ y $(CDA) = \frac{cd\,\mathrm{sen}\,D}{2} \leq \frac{cd}{2}$, tenemos que $1 = (ABCD) \leq \frac{ab+cd}{2}$. Análogamente, $1 = (ABCD) \leq \frac{bc+da}{2}$. Estas dos desigualdades nos garantizan que $ab+bc+cd+da \geq 4$.

Finalmente, como $(e+f)^2 = 4ef+(e-f)^2 \geq 4ef \geq 8$ y $(a+b+c+d)^2 = 4(a+c)(b+d)+((a+c)-(b+d))^2 \geq 4(a+c)(b+d) = 4(ab+bc+cd+da) \geq 16$, tenemos que, $a+b+c+d+e+f \geq 4+\sqrt{8}$.

Ejemplo 2.6.2 *(Iberoamericana, 1992) A partir de un triángulo ABC, se construye un hexágono H de vértices A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 como se muestra en la figura. Demuestre que el área del hexágono H es mayor o igual que trece veces el área del triángulo ABC.*



Es claro, usando la fórmula de área $(ABC) = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$, que

$$\begin{aligned}(A_1A_2B_1B_2C_1C_2) =&(A_1BC_2) + (A_2CB_1) + (B_2AC_1) + (AA_1A_2)+\\ &+ (BB_1B_2) + (CC_1C_2) - 2(ABC)\\ =&\frac{(c+a)^2 \operatorname{sen} B}{2} + \frac{(a+b)^2 \operatorname{sen} C}{2} + \frac{(b+c)^2 \operatorname{sen} A}{2}+\\ &+ \frac{a^2 \operatorname{sen} A}{2} + \frac{b^2 \operatorname{sen} B}{2} + \frac{c^2 \operatorname{sen} C}{2} - 2(ABC)\\ =&\frac{(a^2+b^2+c^2)(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)}{2} + ca \operatorname{sen} B+\\ &+ ab \operatorname{sen} C + b\,c \operatorname{sen} A - 2(ABC)\\ =&\frac{(a^2+b^2+c^2)(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)}{2} + 4(ABC).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A_1A_2B_1B_2C_1C_2) \geq 13(ABC)$ si y sólo si

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)}{2} \geq 9(ABC) = \frac{9abc}{4R}.$$

Usando la ley de los senos, $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{1}{2R}$, tenemos que la desigualdad es cierta si y sólo si $\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{4R} \geq \frac{9abc}{4R}$, o lo que es lo mismo

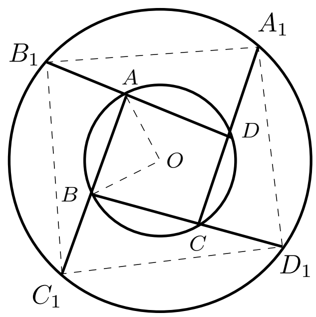
$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \geq 9abc.$$

La última desigualdad se deduce ya sea de la desigualdad $MG - MA$, de la desigualdad del reacomodo o bien de la desigualdad de Tchebychev. Además, se da la igualdad solamente en el caso en que $a = b = c$.

Ejemplo 2.6.3 *(China, 1988 y 1993) Se tienen dos circunferencias concéntricas de radios R y R_1 $(R_1 > R)$ y un cuadrilátero convexo $ABCD$ inscrito en la circunferencia pequeña. Las extensiones de AB, BC, CD y DA intersectan a la circunferencia grande en C_1, D_1, A_1 y B_1, respectivamente. Muestre que:*

(i) $\dfrac{\text{perímetro de } A_1B_1C_1D_1}{\text{perímetro de } ABCD} \geq \dfrac{R_1}{R}$.

(ii) $\dfrac{(A_1B_1C_1D_1)}{(ABCD)} \geq \left(\dfrac{R_1}{R}\right)^2$, *donde $(ABCD)$ denota el área del cuadrilátero.*



Para demostrar (i), utilizamos la desigualdad de Ptolomeo (ver ejercicio 2.11) aplicada a los cuadriláteros OAB_1C_1, OBC_1D_1, OCD_1A_1 y ODA_1B_1, ésta nos asegura que

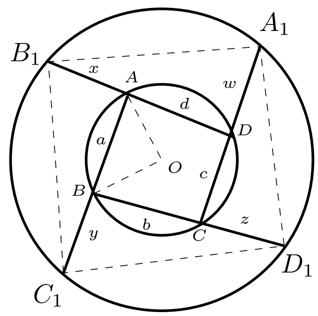
$$\begin{aligned} AC_1 \cdot R_1 &\leq B_1C_1 \cdot R + AB_1 \cdot R_1 \\ BD_1 \cdot R_1 &\leq C_1D_1 \cdot R + BC_1 \cdot R_1 \\ CA_1 \cdot R_1 &\leq D_1A_1 \cdot R + CD_1 \cdot R_1 \\ DB_1 \cdot R_1 &\leq A_1B_1 \cdot R + DA_1 \cdot R_1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Luego, al sumar estas desigualdades y descomponer AC_1, BD_1, CA_1 y DB_1 como $AB + BC_1$, $BC + CD_1$, $CD + DA_1$ y $DA + AB_1$, respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} &R_1 \cdot \text{perímetro}\,(ABCD) + R_1(BC_1 + CD_1 + DA_1 + AB_1) \\ &\qquad \leq R \cdot \text{perímetro}\,(A_1B_1C_1D_1) + R_1(AB_1 + BC_1 + CD_1 + DA_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\frac{\text{perímetro}\,(A_1B_1C_1D_1)}{\text{perímetro}\,(ABCD)} \geq \frac{R_1}{R}.$$

Para demostrar (ii), usaremos el hecho que $(ABCD) = \frac{ad \operatorname{sen} A + bc \operatorname{sen} A}{2} = \frac{\operatorname{sen} A}{2}(ad+bc)$ y también que $(ABCD) = \frac{ab \operatorname{sen} B + cd \operatorname{sen} B}{2} = \frac{\operatorname{sen} B}{2}(ab+cd)$, donde $A = \angle DAB$ y $B = \angle ABC$.



Como $(AB_1C_1) = \frac{x(a+y)\operatorname{sen}(180° - A)}{2} = \frac{x(a+y)\operatorname{sen} A}{2}$, podemos deducir la igualdad $\frac{(AB_1C_1)}{(ABCD)} = \frac{x(a+y)}{ad+bc}$. Análogamente, $\frac{(BC_1D_1)}{(ABCD)} = \frac{y(b+z)}{ab+cd}$, $\frac{(CD_1A_1)}{(ABCD)} = \frac{z(c+w)}{ad+bc}$, $\frac{(DA_1B_1)}{(ABCD)} = \frac{w(d+x)}{ab+cd}$. Luego,
$$\frac{(A_1B_1C_1D_1)}{(ABCD)} = 1 + \frac{x(a+y)+z(w+c)}{ad+bc} + \frac{y(b+z)+w(d+x)}{ab+cd}.$$

La potencia de un punto de la circunferencia grande con respecto a la circunferencia pequeña es igual a $R_1^2 - R^2$. En particular, las potencias de A_1, B_1, C_1 y D_1 son la misma. Por otro lado, tenemos que estas potencias son $w(w+c)$, $x(x+d)$, $y(y+a)$ y $z(z+b)$, respectivamente.
Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que la razón de las áreas es
$$\begin{aligned}&\frac{(A_1B_1C_1D_1)}{(ABCD)} = \\ &= 1 + (R_1^2 - R^2)\left[\frac{x}{y(ad+bc)} + \frac{z}{w(ad+bc)} + \frac{y}{z(ab+cd)} + \frac{w}{x(ab+cd)}\right],\end{aligned}$$

La desigualdad $MG - MA$, nos permite deducir que
$$\frac{(A_1B_1C_1D_1)}{(ABCD)} \geq 1 + \frac{4(R_1^2 - R^2)}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}.$$

Ahora bien, como $2\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} \leq ad+bc+ab+cd = (a+c)(b+d) \leq \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 \leq \frac{(4\sqrt{2}R)^2}{4} = 8R^2$, las dos primeras desigualdades se dan por la desigualdad $MG - MA$, y la última se debe a que el cuadrado es de los cuadriláteros inscritos en una circunferencia, el de mayor perímetro. Así

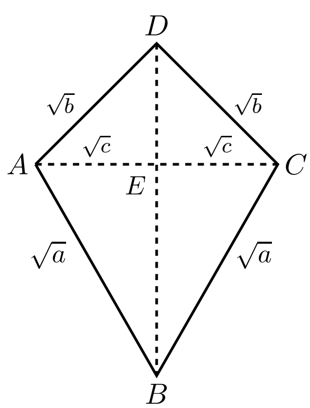
$$\frac{(A_1B_1C_1D_1)}{(ABCD)} \geq 1 + \frac{4(R_1^2 - R^2)}{4R^2} = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2.$$

Desde luego, las igualdades en $i)$ y $ii)$ ocurren cuando $ABCD$ es un cuadrado y únicamente en este caso. Ya que para reducir la desigualdad (2.8) a una igualdad, se debe tener que los cuatro cuadriláteros OAB_1C_1, OBC_1D_1, OCD_1A_1 y ODA_1B_1 sean cíclicos. Luego, OA es bisectriz del ángulo BAD, lo mismo sucede con OB, OC y OD.

Existen problemas que a pesar de no ser planteados de forma geométrica nos invitan a buscar relaciones geométricas, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6.4 *Si a, b, c son números positivos con $c < a$ y $c < b$, se tiene que $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.*

Consideremos los triángulos isósceles ABC y ACD, los cuales comparten el lado AC de longitud $2\sqrt{c}$; tomamos el primero con lados iguales, $AB = BC$, de longitud igual a $\sqrt{a}$ y el segundo que satisfaga que $CD = DA$ y de longitud igual a $\sqrt{b}$.



El área del papalote $ABCD$ es por un lado

$$(ABCD) = (ABC) + (ACD) = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{b(b-c)}$$

y por otro, $(ABCD) = 2(ABD) = \frac{2\sqrt{ab}\,\mathrm{sen}\,\angle BAD}{2}$.

Esta última forma de calcular el área muestra claramente que $(ABCD) \leq \sqrt{ab}$, de donde se sigue el resultado buscado.

Podemos dar otra solución del ejemplo anterior. Como AC y BD son perpendiculares, por el teorema de Pitágoras, tenemos $DE = \sqrt{b-c}$ y $EB = \sqrt{a-c}$. Por la desigualdad de Ptolomeo (ver ejercicio 2.11)

$$(\sqrt{b-c} + \sqrt{a-c})(2\sqrt{c}) \leq \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{b},$$

de donde el resultado se sigue.

Ejercicio 2.59 *En cada lado de un cuadrado con lados de longitud uno, se escoge un punto. Los cuatro puntos forman un cuadrilátero con lados de longitud a, b, c y d, muestre que:*

(i) $2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4,$

(ii) $2\sqrt{2} \leq a + b + c + d \leq 4.$

Ejercicio 2.60 *En cada lado de un hexágono regular de lados de longitud 1 se escoge un punto. Los seis puntos forman un hexágono de perímetro h. Muestre que $3\sqrt{3} \leq h \leq 6$.*

Ejercicio 2.61 *Considere las tangentes al incírculo, de un triángulo ABC, que son paralelas a los lados del triángulo. Éstas determinan junto con los lados del triángulo un hexágono T. Muestre que*

$$\text{perímetro de } T \leq \frac{2}{3} \text{ perímetro de } (ABC).$$

Ejercicio 2.62 *Encontrar el radio del círculo de área máxima que puede cubrirse con tres círculos de radio 1.*

Ejercicio 2.63 *Encontrar el radio del círculo de área máxima que puede cubrirse con tres círculos de radios r_1, r_2 y r_3.*

Ejercicio 2.64 *Dentro de un cuadrado de lado 1, coloque dos cuadrados ajenos. Si las longitudes de los lados de los dos cuadrados son a y b, respectivamente, muestre que $a + b \leq 1$.*

Ejercicio 2.65 *Un cuadrilátero convexo está inscrito en una circunferencia de radio 1, de manera que uno de sus lados es un diámetro y los otros son de longitudes a, b, c. Muestre que $abc \leq 1$.*

Ejercicio 2.66 *Sea $ABCDE$ un pentágono convexo de área $(ABCDE)$ y tal que las áreas de los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB son iguales, muestre que:*

(i) $\dfrac{(ABCDE)}{4} < (ABC) < \dfrac{(ABCDE)}{3}$,

(ii) $(ABCDE) = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}(ABC)$.

Ejercicio 2.67 *Si AD, BE y CF son las alturas del triángulo ABC, muestre que*

$$\text{perímetro}\,(DEF) \leq s,$$

donde s es el semiperímetro de ABC.

Ejercicio 2.68 *Las longitudes de las bisectrices internas de un triángulo son menores o iguales a 1, muestre que el área de dicho triángulo es menor o igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.*

Ejercicio 2.69 *Si a, b, c, d son las longitudes de los lados de un cuadrilátero convexo de área $(ABCD)$, muestre que:*

(i) $(ABCD) \leq \dfrac{ab+cd}{2}$,

(ii) $(ABCD) \leq \dfrac{ac+bd}{2}$,

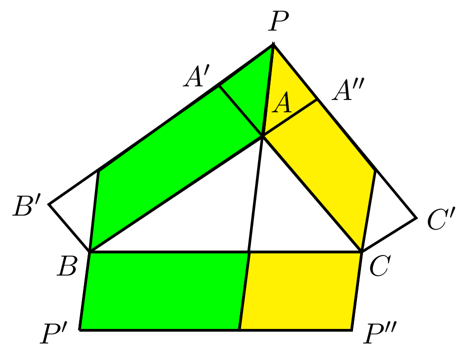
(iii) $(ABCD) \leq \left(\dfrac{a+c}{2}\right)\left(\dfrac{b+d}{2}\right)$.

2.7. Teorema de Erdös-Mordell

Teorema 2.7.1 (Teorema de Pappus) *Sean ABC un triángulo, $AA'B'B$ y $CC'A''A$ dos paralelogramos construidos sobre ACy AB, de manera que ambos estén hacia adentro o ambos hacia afuera del triángulo. Sea P la intersección de $B'A'$ con $C'A''$. Construyamos otro paralelogramo $BP'P''C$ sobre BC de manera que BP' sea paralela a AP y de la misma longitud. Entonces se tiene la siguiente relación entre las áreas,*

$$(BP'P''C) = (AA'B'B) + (CC'A''A).$$

Demostración.

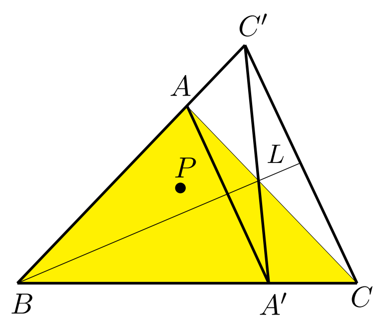


Teorema 2.7.2 (Teorema de Erdös-Mordell) *Sea P un punto arbitrario dentro o sobre la frontera de un triángulo ABC. Si p_a, p_b, p_c son las distancias de P a los lados a, b, c de ABC, respectivamente, entonces*

$$PA + PB + PC \geq 2\left(p_a + p_b + p_c\right).$$

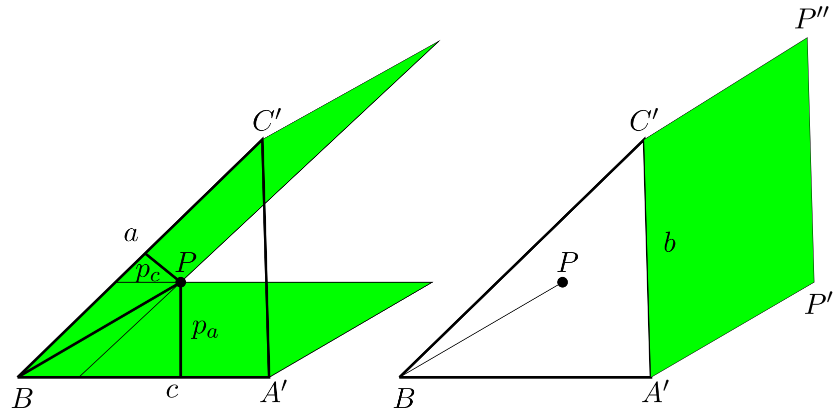
Además, se da la igualdad si y sólo si el triángulo ABC es equilátero y P es el circuncentro.

Demostración. (Kazarinoff) Al triángulo ABC, lo reflejamos con respecto a la bisectriz BL del ángulo B. Sean A' y C' los reflejados de A y C. Al punto P no lo reflejamos. Ahora consideramos los paralelogramos determinados por B, P y A', y por B, P y C'.



La suma de las áreas de estos paralelogramos es $cp_a + ap_c$ y es igual al área del paralelogramo $A'P'P''C'$, donde $A'P'$ es paralela a BP y de igual longitud. El área de $A'P'P''C'$ es menor o igual que $b \cdot PB$. Además, las áreas son iguales si BP es perpendicular a $A'C'$ si y sólo si P está sobre BO, donde O es el circuncentro de ABC[9].

[9] BP es perpendicular a $A'C'$ si y sólo si $\angle PBA' = 90^\circ - \angle A'$, pero $\angle A' = \angle A$ y $OBC = 90^\circ - \angle A$, luego P deberá de estar sobre BO.



Luego,

$$cp_a + ap_c \leq bPB.$$

Por lo tanto,

$$PB \geq \frac{c}{b}p_a + \frac{a}{b}p_c.$$

Análogamente,

$$PA \geq \frac{b}{a}p_c + \frac{c}{a}p_b \quad \text{y} \quad PC \geq \frac{b}{c}p_a + \frac{a}{c}p_b.$$

Al sumar las desigualdades, tenemos

$$PA+PB+PC \geq \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)p_a+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)p_b+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)p_c \geq 2\left(p_a+p_b+p_c\right),$$

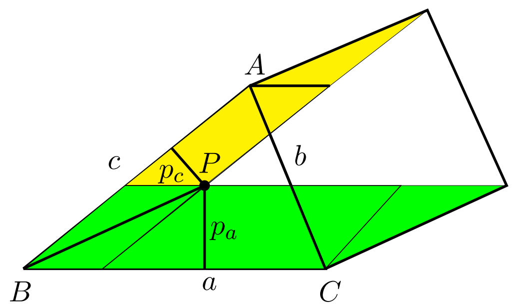
ya que $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2$. Además, tenemos la igualdad si y sólo si $a = b = c$ y P se encuentra en AO, BO y CO. Es decir, si el triángulo es equilátero y $P = O$.

Ejemplo 2.7.3 *Con la notación del teorema de Erdös-Mordell, muestre que*

$$aPA + bPB + cPC \geq 4(ABC).$$

Considere los dos paralelogramos que determinan B, C, P y B, A, P, como se muestra en la figura, y el paralelogramo que se construye siguiendo el teorema de Pappus. Es claro que

$$bPB \geq ap_a + cp_c.$$



De manera análoga, se tienen

$$\begin{aligned} aPA &\geq bp_b + cp_c, \\ cPC &\geq ap_a + bp_b. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$aPA + bPB + cPC \geq 2(ap_a + bp_b + cp_c) = 4(ABC).$$

Ejemplo 2.7.4 *Con la notación del teorema de Erdös-Mordell, muestre que*

$$p_a PA + p_b PB + p_c PC \geq 2\left(p_a p_b + p_b p_c + p_c p_a\right).$$

Como en el ejemplo anterior, tenemos que $aPA \geq bp_b + cp_c$. Por lo que,

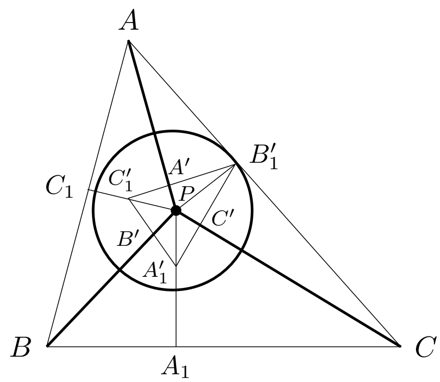
$$p_a PA \geq \frac{b}{a} p_a p_b + \frac{c}{a} p_c p_a.$$

Análogamente, tenemos que $p_b PB \geq \frac{a}{b} p_a p_b + \frac{c}{b} p_b p_c$, $p_c PC \geq \frac{a}{c} p_c p_a + \frac{b}{c} p_b p_c$. Al sumar las tres desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} p_a PA + p_b PB + p_c PC &\geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) p_a p_b + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) p_b p_c + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) p_c p_a \\ &\geq 2\left(p_a p_b + p_b p_c + p_c p_a\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7.5 *Con la notación del teorema de Erdös-Mordell, muestre que*

$$2\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\right) \leq \frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c}.$$



Hagamos la inversión en la circunferencia de centro P y radio $d = p_b$. Si A', B', C' son los inversos de A, B, C, respectivamente, y A_1', B_1', C_1', los inversos de A_1, B_1, C_1, respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} PA \cdot PA' &= PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = d^2 \\ PA_1 \cdot PA_1' &= PB_1 \cdot PB_1' = PC_1 \cdot PC_1' = d^2. \end{aligned}$$

Más aún, A', B' y C' se encuentran sobre $B_1'C_1'$, $C_1'A_1'$, y $A_1'B_1'$, respectivamente, y los segmentos PA', PB' y PC' son perpendiculares a $B_1'C_1'$, $C_1'A_1'$ y $A_1'B_1'$, respectivamente.
Aplicando el teorema de Erdös-Mordell al triángulo $A_1'B_1'C_1'$, obtenemos que $PA_1' + PB_1' + PC_1' \geq 2\,(PA' + PB' + PC')$.
Pero como,

$$PA_1' = \frac{d^2}{PA_1}, \quad PB_1' = \frac{d^2}{PB_1}, \quad PC_1' = \frac{d^2}{PC_1},$$

$$PC' = \frac{d^2}{PC}, \quad PB' = \frac{d^2}{PB}, \quad PA' = \frac{d^2}{PA},$$

luego,

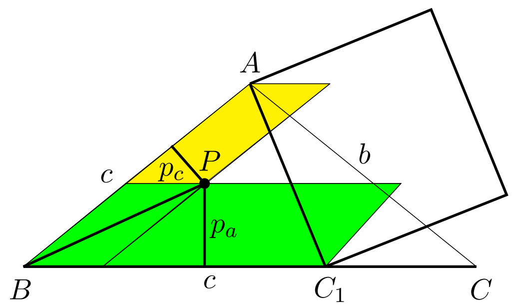
$$d^2\left(\frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PB_1} + \frac{1}{PC_1}\right) \geq 2d^2\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\right),$$

por lo tanto,

$$2\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\right) \leq \left(\frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c}\right).$$

Ejemplo 2.7.6 *Utilizando la notación del teorema de Erdös-Mordell, muestre que*

$$PA \cdot PB \cdot PC \geq \frac{R}{2r}\left(p_a + p_b\right)\left(p_b + p_c\right)\left(p_c + p_a\right).$$



Sea C_1 sobre BC tal que $BC_1 = AB$. Luego, $AC_1 = 2c \operatorname{sen} \frac{B}{2}$, y el teorema de Pappus nos garantiza que, $PB\left(2c \operatorname{sen} \frac{B}{2}\right) \geq c\, p_a + c\, p_c$. Por lo tanto,

$$PB \geq \frac{p_a + p_c}{2 \operatorname{sen} \frac{B}{2}}.$$

Análogamente,

$$PA \geq \frac{p_b + p_c}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}} \quad \text{y} \quad PC \geq \frac{p_a + p_b}{2 \operatorname{sen} \frac{C}{2}}.$$

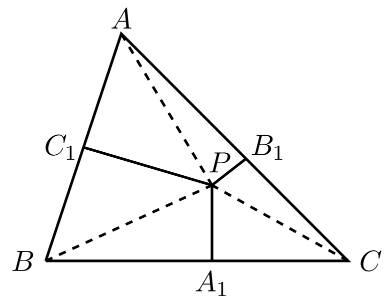
Luego, al multiplicar obtenemos

$$PA \cdot PB \cdot PC \geq \frac{1}{8} \frac{1}{\left(\operatorname{sen} \frac{A}{2}\right)\left(\operatorname{sen} \frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{sen} \frac{C}{2}\right)}\left(p_a + p_b\right)\left(p_b + p_c\right)\left(p_c + p_a\right),$$

La solución del ejercicio 2.42, nos ayuda a probar que $\left(\operatorname{sen} \frac{A}{2}\right)\left(\operatorname{sen} \frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{sen} \frac{C}{2}\right) = \frac{r}{4R}$, de donde el resultado se sigue inmediatamente.

Ejemplo 2.7.7 *(IMO, 1991) Sea P un punto interior del triángulo ABC. Muestre que alguno de los ángulos $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ es menor o igual a $30°$.*

Tracemos A_1, B_1 y C_1 las perpendiculares desde P a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Por el teorema de Erdös Mordell, obtenemos que $PA + PB + PC \geq 2PA_1 + 2PB_1 + 2PC_1$.



Luego, alguna de las desigualdades siguientes deberá ocurrir,

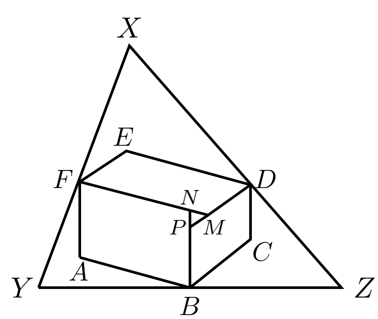
$$PA \geq 2PC_1, \quad PB \geq 2PA_1 \quad \text{o} \quad PC \geq 2PB_1.$$

Si por ejemplo, $PA \geq 2PC_1$, se tiene que $\frac{1}{2} \geq \frac{PC_1}{PA} = \operatorname{sen} PAB$, por lo que $\angle PAB \leq 30°$ o $\angle PAB \geq 150°$. Pero si, $\angle PAB \geq 150°$, entonces deberá suceder que $\angle PBC < 30°$ y en cualquier caso terminamos.

Ejemplo 2.7.8 *(IMO, 1996) Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo, donde AB es paralelo a DE, BC paralelo a EF y CD paralelo a FA. Sean R_A, R_C, R_E los circunradios de los triángulos FAB, BCD y DEF, respectivamente, y sea $\mathcal{P}$ el perímetro del hexágono. Muestre que*

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{\mathcal{P}}{2}.$$

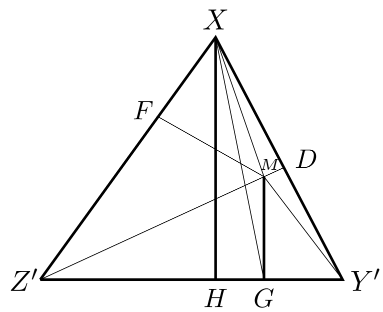
Sean M, N y P puntos dentro del hexágono de manera que $MDEF$, $NFAB$ y $PBCD$ sean paralelogramos. Sea XYZ el triángulo formado por las rectas que pasan a través de B, D, F perpendiculares a FA, BC, DE, respectivamente, donde B está sobre YZ, D sobre ZX y F sobre XY. Observemos que MNP y XYZ son triángulos semejantes.



Como los triángulos DEF y DMF son congruentes, éstos tienen el mismo circunradio; además, como XM es un diámetro del circuncírculo del triángulo DMF, luego $XM = 2R_E$. Análogamente, $YN = 2R_A$ y $ZP = 2R_C$. Así, la desigualdad que se desea mostrar se puede escribir como

$$XM + YN + ZP \geq BN + BP + DP + DM + FM + FN.$$

El caso $M = N = P$, es la desigualdad de Erdös-Mordell, en la que se basa lo que sigue de la prueba.



Sean Y', Z' las respectivas reflexiones de Y y Z con respecto a la bisectriz interna del $\angle X$. Sean G, H los pies de las perpendiculares de M, X sobre $Y'Z'$, respectivamente. Como $(XY'Z') = (XMZ') + (Z'MY') + (Y'MX)$, tenemos

$$XH \cdot Y'Z' = MF \cdot XZ' + MG \cdot Y'Z' + MD \cdot Y'X.$$

Si hacemos $x = Y'Z'$, $y = ZX'$, $z = XY'$, la igualdad es

$$xXH = xMG + zDM + yFM.$$

Como $\angle XHG = 90^o$, entonces $XH = XG \operatorname{sen} \angle XGH \leq XG$. Además, por la desigualdad del triángulo, $XG \leq XM + MG$, tenemos que

$$XM \geq XH - MG = \frac{z}{x}DM + \frac{y}{x}FM.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} YN &\geq \frac{x}{y}FN + \frac{z}{y}BN, \\ ZP &\geq \frac{y}{z}BP + \frac{x}{y}DP. \end{aligned}$$

Al sumar estas tres desigualdades, obtenemos

$$XM + YN + ZP \geq \frac{z}{x}DM + \frac{y}{x}FM + \frac{x}{y}FN + \frac{z}{y}BN + \frac{y}{z}BP + \frac{x}{z}DP. \quad (2.9)$$

Observemos que

$$\frac{y}{z}BP + \frac{z}{y}BN = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{BP+BN}{2}\right) + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)\left(\frac{BP-BN}{2}\right).$$

Como los triángulos XYZ y MNP son semejantes, podemos definir r como

$$r = \frac{FM-FN}{XY} = \frac{BN-BP}{YZ} = \frac{DP-DM}{ZX}.$$

Al aplicar la desigualdad $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{y}{z}BP + \frac{z}{y}BN &= \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{BP+BN}{2}\right) - \frac{r}{2}\left(\frac{yx}{z} - \frac{zx}{y}\right)\\ &\geq BP + BN - \frac{r}{2}\left(\frac{yx}{z} - \frac{zx}{y}\right).\end{aligned}$$

Desigualdades análogas se tienen para

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}FN + \frac{y}{x}FM &\geq FN + FM - \frac{r}{2}\left(\frac{xz}{y} - \frac{yz}{x}\right),\\ \frac{z}{x}DM + \frac{x}{z}DP &\geq DM + DP - \frac{r}{2}\left(\frac{zy}{x} - \frac{xy}{z}\right).\end{aligned}$$

Al sumar las desigualdades y sustituirlas en la ecuación (2.9), tenemos que

$$XM + YN + ZP \geq BN + BP + DP + DM + FM + FN$$

como se deseaba.

Ejercicio 2.70 *Utilizando la notación del teorema de Erdös-Mordell, muestre que*

$$PA \cdot PB \cdot PC \geq \frac{4R}{r} p_a p_b p_c.$$

Ejercicio 2.71 *Utilizando la notación del teorema de Erdös-Mordell, muestre que:*

(i) $\dfrac{PA^2}{p_b p_c} + \dfrac{PB^2}{p_c p_a} + \dfrac{PC^2}{p_a p_b} \geq 12,$

(ii) $\dfrac{PA}{p_b + p_c} + \dfrac{PB}{p_c + p_a} + \dfrac{PC}{p_a + p_b} \geq 3,$

(iii) $\dfrac{PA}{\sqrt{p_b p_c}} + \dfrac{PB}{\sqrt{p_c p_a}} + \dfrac{PC}{\sqrt{p_a p_b}} \geq 6,$

(iv) $PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA \geq 4(p_a p_b + p_b p_c + p_c p_a).$

Ejercicio 2.72 *Sea ABC un triángulo, P un punto arbitrario del plano y sean p_a, p_b y p_c las distancias de P a los lados del triángulo con longitudes a, b y c, respectivamente. Si por ejemplo, P y A están en distintos lados de la recta BC, entonces p_a es negativo, y lo mismo pasa en los otros dos casos. Muestre que*

$$PA + PB + PC \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) p_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) p_b + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) p_c.$$

2.8. Problemas de optimización

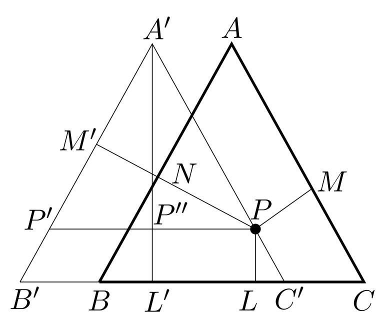
En esta sección damos dos ejemplos clásicos conocidos como el problema de Fermat-Steiner y el problema de Fagnano.

El problema de Fermat-Steiner. Este problema plantea encontrar un punto en el interior del triángulo o sobre los lados, de manera que la suma de las distancias del punto a los vértices del triángulo sea mínima. Presentaremos tres soluciones donde resaltamos los métodos para resolver el problema.

La solución de Torricelli. Esta se basa en los siguientes dos lemas.

Lema 2.8.1 (Lema de Viviani) *La suma de las distancias de un punto interior a los lados de un triángulo equilátero es igual a la altura del triángulo.*

Demostración. Sea P un punto interior del triángulo ABC. Tracemos el triángulo $A'B'C'$ de lados paralelos a los lados de ABC, con P sobre $C'A'$ y $B'C'$ sobre la recta por B y C.

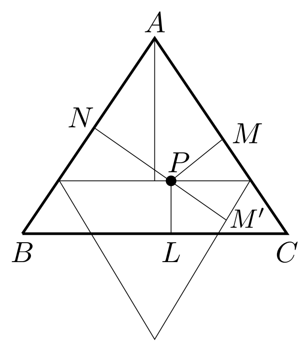


Si L, M y N son los pies de las perpendiculares sobre los lados, es claro que $PM = NM'$, donde M' es la intersección de PN con $A'B'$. Además, PM' es altura del triángulo equilátero $A'P'P$. Si $A'P''$ es la altura del triángulo $A'P'P$ desde A', es claro que $PM' = A'P''$. Sea L' el pie de la altura desde el vértice A' del triángulo $A'B'C'$. Luego,

$$PL + PM + PN = PL + NM' + PN = PL + A'P'' = A'P'' + P''L' = A'L'.$$

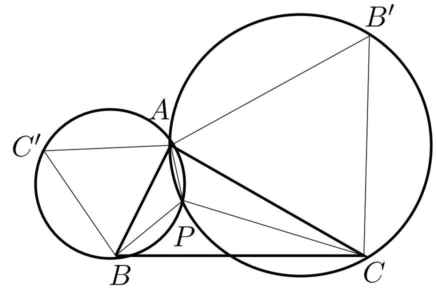
Observación 2.8.2 (i) *Hay una prueba del lema de Viviani que se basa en el manejo de las áreas. Denotemos por (ABC) el área del triángulo ABC, entonces $(ABC) = (ABP) + (BCP) + (CAP)$. Luego, si a es la longitud del lado del triángulo y h la longitud de su altura, se tiene que $ah = aPN + aPL + aPM$, cancelando a obtenemos $h = PN + PL + PM$.*

(ii) *Otra demostración del lema de Viviani se deduce de la siguiente figura*



Lema 2.8.3 *Si ABC es un triángulo con ángulos menores o iguales a $120°$, hay un único punto P tal que $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$. El punto P se conoce como* **el punto de Fermat**.

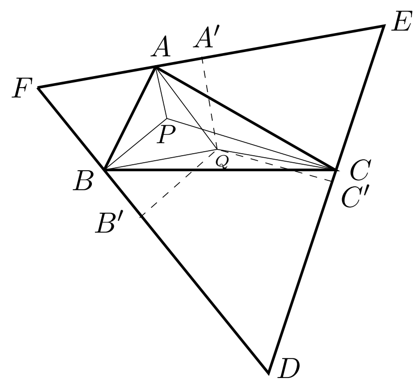
Demostración. Primero veamos la existencia de P. Sobre los lados AB y CA construimos triángulos equiláteros ABC' y CAB'. Sus circuncírculos se intersectan en A y en otro punto que denotamos por P.



Como $APCB'$ es cíclico, tenemos que, $\angle CPA = 180^o - \angle B' = 120^o$. Análogamente, por ser $APBC'$ cíclico, $\angle APB = 120^o$. Finalmente, $\angle BPC = 360^o - \angle APB - \angle CPA = 360^o - 120^o - 120^o = 120^o$.

Para la unicidad, supongamos que Q cumple con $\angle AQB = \angle BQC = \angle CQA = 120^o$. Como $\angle AQB = 120^o$, el punto Q deberá estar en el circuncírculo de ABC'. Análogamente, en el circuncírculo de CAB', por lo que $Q = P$.

Estudiaremos ahora la solución de Torricelli al problema de Fermat-Steiner. Dado el triángulo ABC con ángulos menores o iguales a 120^o, construimos el punto de Fermat P, éste satisface que $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^o$. Ahora por A, B y C tracemos perpendiculares a AP, BP y CP, respectivamente.

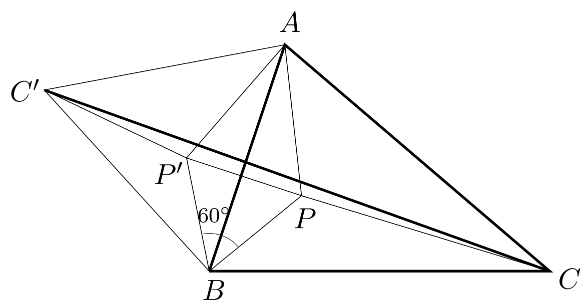


Estas perpendiculares determinan un triángulo DEF. Veamos que éste es equilátero; como el cuadrilátero $PBDC$ es cíclico por tener en B y C ángulos de $90°$ y como $\angle BPC = 120°$, podemos deducir que $\angle BDC = 60°$. Podemos repetir este argumento en cada ángulo, luego DEF es equilátero.

Ahora bien, sabemos que la distancia de P a los vértices del triángulo ABC es igual a la longitud de la altura del triángulo equilátero DEF. Observemos que cualquier otro punto Q, dentro del triángulo ABC, satisface que $AQ \geq A'Q$, donde $A'Q$ es la distancia de Q al lado EF, análogamente, $BQ \geq B'Q$ y $CQ \geq C'Q$. Por lo tanto, $AQ+BQ+CQ$ es mayor o igual que la longitud de la altura de DEF que es $AP+BP+CP$, que a su vez es igual a $A'Q+B'Q+C'Q$, esto último se sigue del lema de Viviani.

La solución de Hofmann-Gallai. Esta forma de resolver el problema usa la ingeniosa idea de rotar la figura para tratar de colocar los tres segmentos que necesitamos, uno seguido de otro, para formar una poligonal y luego sumarlos. Entonces, al unir con un segmento los dos puntos extremos y como el camino más corto entre ellos es este segmento de recta, se buscan entonces las condiciones bajo las cuales la poligonal está sobre tal recta. La demostración la da J. Hofmann en 1929, pero el método para resolverlo era ya conocido y debería ser atribuido al húngaro Tibor Gallai. Estudiemos entonces esta solución.

Consideremos un triángulo ABC y un punto P dentro de él; tracemos AP, BP y CP. Después giremos la figura alrededor de B un ángulo de $60°$, en sentido positivo.



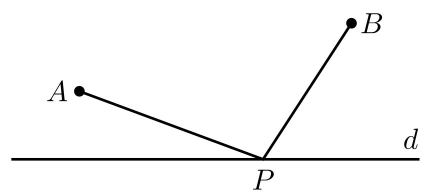
Tenemos varias cosas que señalar. Si C' es la imagen de A y P' la imagen de P, los triángulos BPP' y BAC' son equiláteros. Además, $AP = P'C'$ y $BP = P'B = P'P$, por lo que, $AP + BP + CP = P'C' + P'P + CP$. La trayectoria $CP + PP' + P'C'$ es mínima cuando C, P, P' y C' son colineales. Esta última condición exige que $\angle C'P'B = 120°$ y $\angle BPC = 120°$; pero como $\angle C'P'B = \angle APB$, el punto P debe cumplir que $\angle APB = \angle BPC = 120°$ (y entonces también $\angle CPA = 120°$).

Una ventaja de esta solución es que proporciona otra caracterización del punto de Fermat y otra forma de localizarlo. Si revisamos la demostración podemos resaltar que el punto P se encuentra en el segmento CC', donde C' es el tercer vértice del triángulo equilátero de lado AB, pero si en lugar de girar con centro en B, se gira alrededor de C, se obtiene otro triángulo equilátero $AB'C$ y se puede concluir que P se encuentra sobre BB'. Luego, podemos encontrar P

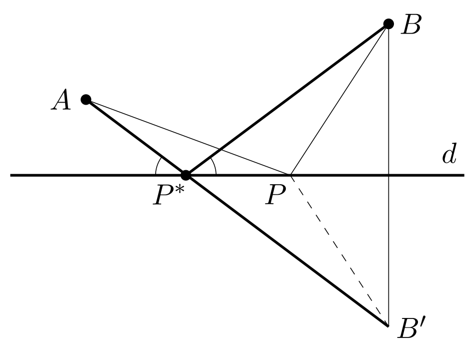
como la intersección de BB' y CC'.

La solución de Steiner. Cuando tratamos de resolver problemas de máximos y mínimos nos enfrentamos principalmente a tres preguntas, (i) ¿existe una solución?, (ii) ¿es única la solución? (iii) ¿qué propiedades caracterizan a la o las soluciones? La solución de Torricelli muestra que, de entre todos los puntos del triángulo, este punto particular P, desde el cual se ven los tres lados del triángulo con un ángulo de 120°, corresponde al menor valor de $PA + PB + PC$. De esta forma responde a las tres preguntas que señalamos, haciéndolo además de una manera elegante. Sin embargo, la solución no da indicios de por qué Torricelli elige tal punto; ¿Cuál fué su primer impulso para tomar ese punto? Probablemente esta pregunta no se podrá responder. En lo que sigue veremos una sucesión de ideas que nos llevan a descubrir por qué el punto de Fermat es el óptimo, éstas son debidas al geómetra suizo Jacob Steiner. Antes veamos los siguientes dos lemas.

Lema 2.8.4 (Problema de Herón) *Encontrar la trayectoria más corta entre dos puntos A y B que están del mismo lado de una recta d, pasando por la recta.*



La distancia más corta entre A y B, pasando por la recta d, la podemos encontrar de la siguiente manera. Reflejemos B sobre d para obtener un punto B'; el segmento AB' corta a d en un punto P^* que hace que $AP^* + P^*B$ sea el mínimo entre las cantidades $AP + PB$, con P en d.

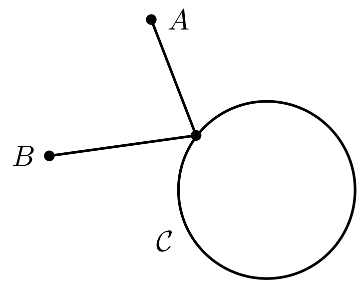


Para convencernos basta observar que

$$AP^* + P^*B = AP^* + P^*B' = AB' \leq AP + PB' = AP + PB.$$

Este punto cumple con el siguiente principio de reflexión: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Desde luego, el punto con esta propiedad es el mínimo.

Lema 2.8.5 (Problema de Herón con circunferencia) *Encontrar la trayectoria más corta entre dos puntos A y B que están fuera de una circunferencia $\mathcal{C}$, tocando a la circunferencia.*

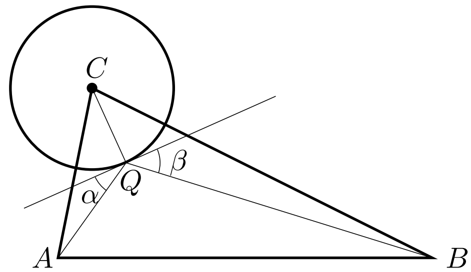


Veremos únicamente un esbozo de la solución.

Sea D un punto sobre $\mathcal{C}$, entonces tenemos que el conjunto $\{P : PA + PB = DA + DB\}$ es una elipse E_D, con focos en los puntos A y B, y que D pertenece a E_D. En general, $\mathcal{E}_d = \{P \ : \ PA + PB = d\}$, donde d es un número positivo, es una elipse con focos en A y B (si $d > AB$). Más aún, estas elipses tienen la propiedad de que $\mathcal{E}_d$ es un subconjunto del interior de $\mathcal{E}_{d'}$ si y sólo si $d < d'$.

Luego, queremos encontrar el punto Q en $\mathcal{C}$ tal que $QA + QB$ sea mínima. El punto óptimo Q pertenece a una elipse, precisamente a $\mathcal{E}_Q$. Esta elipse $\mathcal{E}_Q$ no intersecta a $\mathcal{C}$ en otro punto, de hecho, si C' es otro punto en común de $\mathcal{E}_Q$ y $\mathcal{C}$, entonces todo punto C'', en el arco de circunferencia entre Q y C' de $\mathcal{C}$, será un punto interior de $\mathcal{E}_Q$, luego $C''A + C''B < QA + QB$ y Q no será el óptimo, lo que es una contradicción.

Luego, el punto Q que minimiza $AQ + QB$ debe pertenecer a la elipse $\mathcal{E}_Q$ que es tangente a $\mathcal{C}$ en Q. La recta tangente común a $\mathcal{E}_Q$ y $\mathcal{C}$ deberá ser perpendicular al radio CQ, donde C es el centro de $\mathcal{C}$ y, por el principio de reflexión de la elipse (ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión), deberá suceder que CQ es bisectriz interna del ángulo $\angle AQB$ y entonces $\angle BQC = \angle CQA$.



Ahora volvamos a la solución de Steiner del problema de Fermat-Steiner. Un punto P que hace que la suma $PA + PB + PC$ sea mínima puede ser uno de los vértices A, B, C o un punto del triángulo distinto a los vértices. En el primer caso, si P es un vértice, entonces un término de la suma $PA+PB+PC$ es cero y los otros dos son las longitudes de los lados del triángulo ABC que tienen en común el vértice elegido. Luego, la suma será mínima cuando el vértice elegido sea el opuesto al lado mayor del triángulo.

Para analizar el segundo de los casos, Steiner sigue una idea, muy útil en los problemas de optimización y que podría caer en la estrategia de "divide y vencerás", que es mantener fijas algunas de las variables y optimizar las restantes. Las condiciones resultantes en las variables no fijas irán restringuiendo el espacio solución hasta llegar al óptimo global. Concretamente procedía así:

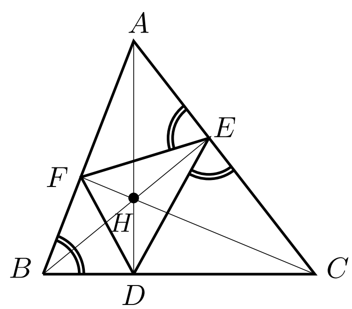
Supongamos que PA tiene una longitud fija, es decir, P pertenece a la circunferencia de centro en A y radio PA. Ahora queremos encontrar el punto P que hace que la suma $PB+PC$ sea mínima. Observemos que B tiene que estar fuera de dicho círculo, de lo contrario $PA \geq AB$ y por la desigualdad del triángulo $PB+PC > BC$, entonces $PA+PB = PC > AB+BC$. Por lo tanto, B sería un mejor punto (en lugar de P). Análogamente, C debe estar fuera del círculo. Ahora bien, como B y C son puntos fuera de la circunferencia $\mathcal{C} = (A, PA)$, el punto óptimo para minimizar $PB + PC$, con la condición de que P sea un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ es, por el lema 2.8.5, un punto Q sobre $\mathcal{C}$, de forma tal que esta circunferencia sea tangente a la elipse con focos B y C en Q. Este punto Q satisface la condición de que los ángulos AQB y CQA sean iguales. Como los papeles de A, B y C puede intercambiarse, si ahora fijamos el punto B (y PB), entonces el punto óptimo Q satisface que los ángulos AQB y BQC son iguales, y entonces $\angle AQB = \angle BQC = \angle CQA = 120°$. Por lo tanto, Q tiene que ser el punto de Fermat. Todo lo anterior funciona en este segundo caso para asegurar que Q está dentro del triángulo ABC, si los ángulos del triángulo no son mayores que $120°$.

El problema de Fagnano Este plantea encontrar, dentro de un triángulo acutángulo, un triángulo inscrito de perímetro mínimo. Damos dos soluciones clásicas, donde el reflejar sobre rectas juega un papel central. Una debida a H. Schwarz y la otra a L. Fejér.

La solución de Schwarz. El matemático alemán Hermann Schwarz dio la siguiente solución del problema basándose en dos observaciones las cuales aparecen en los siguientes dos lemas. Estos lemas nos hacen ver que el triángulo inscrito de menor perímetro es el triángulo formado con los pies de las alturas del triángulo, el cual se conoce como **triángulo órtico.**

Lema 2.8.6 *Sea ABC un triángulo. Sean D, E y F los pies de las alturas sobre BC, CA y AB, desde los vértices A, B y C, respectivamente. Entonces los triángulos ABC, AEF, DBF y DEC son semejantes.*

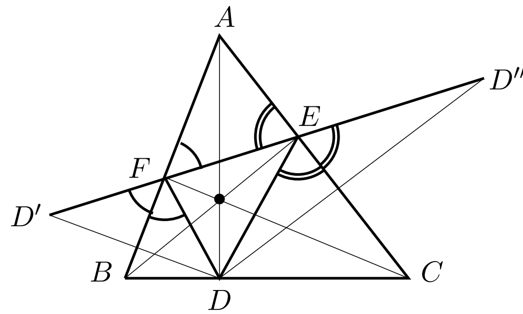
Demostración. Basta ver que los primeros dos triángulos son semejantes, ya que las otras semejanzas se demuestran de manera análoga.



Como estos dos triángulos tienen en común al ángulo en A, bastará ver que $\angle AEF = \angle ABC$. Pero es claro que $\angle AEF + \angle FEC = 180°$ y como el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico se tiene que $\angle ABC + \angle FEC = 180°$, por lo tanto $\angle AEF = \angle ABC$.

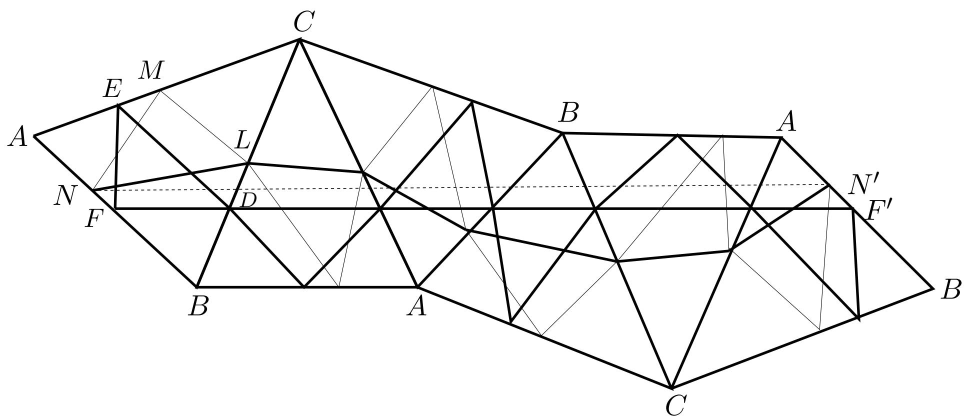
Lema 2.8.7 *Con la notación del lema anterior se tiene que, el reflejado de D con respecto a AB es colineal a E y F, y el reflejado de D con respecto a CA es colineal con E y F.*

Demostración. Es inmediata del lema anterior.



Con estos elementos podemos ahora finalizar la solución, propuesta por H. Schwarz, al problema de Fagnano.

Demostraremos ahora que el triángulo de perímetro mínimo es el triángulo órtico. Denotemos a éste por DEF y consideremos otro triángulo LMN inscrito en ABC.



Reflejemos la figura completa sobre el lado BC, después el triángulo resultante lo reflejamos sobre CA, luego sobre AB, sobre BC y finalmente en CA.

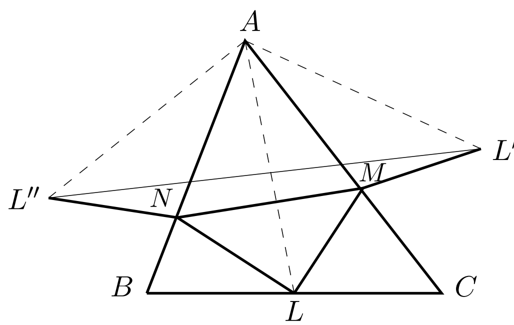
Tenemos en total seis triángulos congruentes y dentro de cada uno de ellos tenemos su triángulo órtico y el otro triángulo inscrito LMN. El lado AB del último triángulo es paralelo al lado AB del primero, ya que como resultado de la primera reflexión, el lado AB se rota en sentido negativo un ángulo $2B$, después en sentido negativo un ángulo $2A$, en la tercera reflexión queda invariante, en la cuarta reflexión gira un ángulo $2B$ en sentido positivo y en la quinta también gira en sentido positivo un ángulo $2A$. Luego, el ángulo total de rotación del segmento AB es cero.

El segmento FF' es igual a dos veces el perímetro del triángulo órtico, ya que FF' se compone de seis pedazos, donde cada lado del órtico está tomado dos veces. También la línea quebrada NN' es el doble del perímetro de LMN.

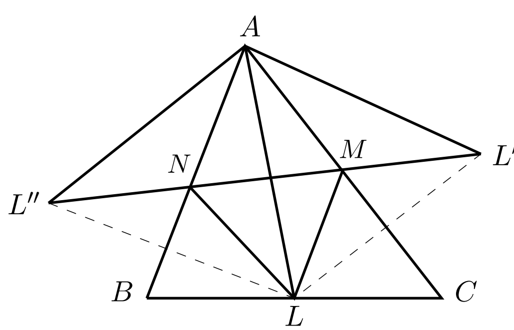
Además, NN' es una recta paralela a FF' y de la misma longitud, luego como la longitud de la quebrada NN' es mayor que la longitud del segmento NN', tenemos que el perímetro de DEF es menor que el perímetro de LMN.

La solución de Fejér. La solución que da el matemático húngaro L. Fejér se basa también en reflexiones. Sea LMN un triángulo inscrito en ABC. Tomemos la reflexión L' del punto L sobre el lado CA y L'' la reflexión de L sobre el lado AB, tracemos los segmentos ML' y NL'', es claro que $LM = ML'$ y que $L''N = NL$. Por lo que el perímetro de LMN satisface que,

$$LM + MN + NL = L''N + NM + ML' \geq L'L''.$$



De lo anterior podemos asegurar que, si el punto L está fijo, los puntos M y N que hacen mínimo el perímetro LMN son las intersecciones de $L'L''$ con CA y AB, respectivamente. Ahora veamos cuál es la mejor opción para el punto L. Ya sabemos que el perímetro de LMN es $L'L''$, así que el punto L deberá hacer que esta cantidad sea mínima. Es evidente que, $AL = AL' = AL''$ y que AC y AB son bisectrices de los ángulos LAL' y $L''AL$, respectivamente, por lo que $\angle L''AL' = 2\angle BAC = 2\alpha$, el cual es un ángulo fijo.



La ley de los cosenos aplicada al triángulo $AL''L'$ nos garantiza que

$$\begin{aligned}(L'L'')^2 &= (AL')^2 + (AL'')^2 - 2AL' \cdot AL'' \cos 2\alpha \\ &= 2AL^2(1 - \cos 2\alpha).\end{aligned}$$

Así, $L'L''$ es mínima cuando AL lo sea, es decir, cuando AL sea la altura[10]. Un análisis semejante desde los puntos B y C nos lleva a que también BM y CN deberán ser alturas. Luego, el triángulo LMN de perímetro mínimo es el triángulo órtico.

Ejercicio 2.73 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo. Si O es la intersección de las diagonales AC y BD, y P, Q, R, S son los pies de las perpendiculares desde O sobre los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente, muestre que $PQRS$ es el cuadrilátero de perímetro mínimo inscrito en $ABCD$.*

Ejercicio 2.74 *Sea P un punto dentro del triángulo ABC. Sean D, E y F los puntos de intersección de AP, BP y CP con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Determine P tal que el área del triángulo DEF sea máxima.*

Ejercicio 2.75 *(IMO, 1981) Sea P un punto dentro del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares desde P a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Encuentre el punto P que minimiza a $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$.*

Ejercicio 2.76 *Sean P, D, E y F, como en el ejercicio 2.75. ¿Para qué punto P, la suma $BD^2 + CE^2 + AF^2$ es mínima?*

Ejercicio 2.77 *Sean P, D, E y F como en el ejercicio 2.75. ¿Para qué punto P, el producto $PD \cdot PE \cdot PF$ es máximo?*

Ejercicio 2.78 *Sea P un punto dentro del triángulo ABC. ¿Para qué punto P, la suma $PA^2 + PB^2 + PC^2$ es mínima?*

Ejercicio 2.79 *Para cada punto P del circuncírculo del triángulo ABC, se trazan las perpendiculares PM y PN a los lados AB y CA, respectivamente. Determine en que punto P, la longitud MN es máxima y cuál es su longitud.*

[10] Hasta aquí bastaría para terminar la demostración de Fejér al problema de Fagnano, ya que si AL es altura y $L'L''$ corta en E y F a los lados CA y AB, respectivamente, entonces BE y CF son alturas. Veamos porqué. El triángulo $AL''L'$ es isósceles con $\angle L''AL' = 2\angle A$, luego, $\angle AL'L'' = 90° - \angle A$ y por simetría $\angle ELA = 90° - \angle A$, por tanto $\angle CLE = \angle A$. Luego, $AELB$ es un cuadrilátero cíclico, por lo tanto$\angle AEB = \angle ALB = 90°$, lo que implica que BE sea altura. Análogamente, CF es altura.

Ejercicio 2.80 *(Turquía, 2000) Sea ABC un triángulo acutángulo con circunradio R, las longitudes de las alturas AD, BE y CF son h_a, h_b y h_c, respectivamente. Sean t_a, t_b y t_c las longitudes de las tangentes desde A, B y C, respectivamente, al circuncírculo de DEF. Muestre que*

$$\frac{t_a^2}{h_a} + \frac{t_b^2}{h_b} + \frac{t_c^2}{h_c} \leq \frac{3}{2}R.$$

Ejercicio 2.81 *Sean h_a, h_b, h_c las longitudes de las alturas de un triángulo ABC y p_a, p_b, p_c las distancias desde un punto P a los lados BC, CA, AB, respectivamente, donde P es un punto dentro del triángulo ABC. Muestre que:*

(i) $\dfrac{h_a}{p_a} + \dfrac{h_b}{p_b} + \dfrac{h_c}{p_c} \geq 9.$

(ii) $h_a h_b h_c \geq 27 p_a p_b p_c.$

(iii) $(h_a - p_a)(h_b - p_b)(h_c - p_c) \geq 8 p_a p_b p_c.$

Ejercicio 2.82 *Si h es la longitud de la altura más grande de un triángulo acutángulo entonces $r + R \leq h$.*

Ejercicio 2.83 *De los triángulos que tienen una base común y un mismo perímetro, el isósceles es el que tiene mayor área.*

Ejercicio 2.84 *De todos los triángulos con un perímetro dado, el triángulo equilátero es el que tiene mayor área.*

Ejercicio 2.85 *De todos los triángulos inscritos en un círculo dado, el triángulo equilátero es el que tiene mayor perímetro.*

Ejercicio 2.86 *Si P es un punto dentro del triángulo ABC, $l = PA$, $m = PB$ y $n = PC$, muestre que*

$$(lm + mn + nl)(l + m + n) \geq a^2 l + b^2 m + c^2 n.$$

Ejercicio 2.87 *(IMO, 1961) Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC y sea (ABC) su área, muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Ejercicio 2.88 *Sea (ABC) el área del triángulo ABC y sea F el punto de Fermat del triángulo. Muestre que*

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq (AF + BF + CF)^2.$$

Ejercicio 2.89 *Sea P un punto dentro del triángulo ABC, muestre que*

$$PA + PB + PC \geq 6r.$$

Ejercicio 2.90 *(***El área del triángulo pedal***)*. *Para un triángulo ABC y un punto P del plano, se define el* **"triángulo pedal"** *de P con respecto a ABC como el triángulo $A_1B_1C_1$, donde A_1, B_1, C_1 son los pies de las perpendiculares desde P sobre BC, CA, AB, respectivamente. Muestre que el área del triángulo $A_1B_1C_1$ satisface*

$$(A_1B_1C_1) = \frac{(R^2 - OP^2)(ABC)}{4R^2},$$

donde O es el circuncentro y (ABC) es el área del triángulo ABC. Concluya que el triángulo pedal de área máxima es el triángulo medial.

Capítulo 3

Problemas Recientes de Desigualdades

Problema 3.1 (Bulgaria, 1995) Sean S_A, S_B y S_C las áreas de los heptágonos regulares $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ y $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$, respectivamente. Suponga que $A_1A_2 = B_1B_3 = C_1C_4$, muestre que

$$\frac{1}{2} < \frac{S_B + S_C}{S_A} < 2 - \sqrt{2}.$$

Problema 3.2 (Repúblicas Checa y Eslovaca, 1995) Sea $ABCD$ un tetraedro con

$$\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = \angle ABC + \angle CBD + \angle DBA = 180^\circ.$$

Muestre que $CD \geq AB$.

Problema 3.3 (Estonia, 1995) Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y α, β, γ los ángulos opuestos a los lados, respectivamente. Muestre que si el inradio del triángulo es r, entonces

$$a \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \beta + c \operatorname{sen} \gamma \geq 9r.$$

Problema 3.4 (Francia, 1995) Tres círculos con el mismo radio tienen un punto común. Si S es el área del conjunto de puntos que son interiores al menos a dos círculos, ¿cómo deberán colocarse los círculos para que S sea mínima?

Problema 3.5 (Alemania, 1995) Sea ABC un triángulo con D y E puntos sobre BC y CA, respectivamente, de manera que DE pasa por el incentro de ABC. Si $S =$ área(CDE) y r es el inradio, muestre que $S \geq 2r^2$.

Problema 3.6 (Irlanda, 1995) Sean A, X, D puntos sobre una recta con X entre A y D. Sea B un punto tal que $\angle ABX = 120°$ y sea C un punto entre B y X. Muestre que $2AD \geq \sqrt{3}\,(AB + BC + CD)$.

Problema 3.7 (Corea, 1995) Un número finito de puntos del plano, tienen la propiedad de que cada tres de ellos forman un triángulo de área menor o igual a 1. Muestre que todos los puntos están dentro o sobre los lados de un triángulo de área menor o igual a 4.

Problema 3.8 (Polonia, 1995) Para un entero positivo n fijo, encuentre el valor mínimo de la suma

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n},$$

donde x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números positivos que satisfacen que la suma de sus recíprocos es n.

Problema 3.9 (IMO, 1995) Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con $AB = BC = CD$ y $DE = EF = FA$, tal que $\angle BCD = \angle EFA = \frac{\pi}{3}$. Sean G y H puntos en el interior del hexágono tales que $\angle AGB = \angle DHE = \frac{2\pi}{3}$. Muestre que

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Problema 3.10 (Balcánica, 1996) Sean O el circuncentro y G el centroide de un triángulo ABC. Sean R y r el circunradio y el inradio del triángulo. Muestre que $OG \leq \sqrt{R(R-2r)}$.

Problema 3.11 (China, 1996) Supóngase que $x_0 = 0$, $x_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$, y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Muestre que

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + \cdots + x_{i-1}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

Problema 3.12 (Polonia, 1996) Sean $n \geq 2$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$ con $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Muestre que para $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$ con $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, se tiene

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}.$$

Problema 3.13 (Rumania, 1996) Sean x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} números reales positivos con $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_{n+1}$. Muestre que

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1} - x_i)}.$$

Problema 3.14 (San Petesburgo, 1996) Sean M la intersección de las diagonales de un cuadrilátero cíclico, N la intersección de los segmentos que unen los puntos medios de lados opuestos y O el circuncentro. Muestre que $OM \geq ON$.

Problema 3.15 (Austria-Polonia, 1996) Si w, x, y y z son números reales que satisfacen $w + x + y + z = 0$ y $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Muestre que

$$-1 \leq wx + xy + yz + zw \leq 0.$$

Problema 3.16 (Taiwan, 1997) Sean a_1, ..., a_n números positivos, tales que $\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ es entero para toda $i = 1, ..., n$, $a_0 = a_n$, $a_{n+1} = a_1$ y $n \geq 3$. Muestre que

$$2n \leq \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + \frac{a_2 + a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n} \leq 3n.$$

Problema 3.17 (Taiwan, 1997) Sea ABC un triángulo acutángulo, con circuncentro O y circunradio R. Muestre que si AO corta al circuncírculo de OBC en D, BO corta al circuncírculo de OCA en E y CO corta al circuncírculo de OAB en F, entonces $OD \cdot OE \cdot OF \geq 8R^3$.

Problema 3.18 (APMO, 1997) Sea ABC un triángulo. La bisectriz interna del ángulo A intersecta al segmento BC en X y al circuncírculo en Y. Sea $l_a = \frac{AX}{AY}$. Análogamente, defina l_b y l_c. Muestre que

$$\frac{l_a}{\text{sen}^2 A} + \frac{l_b}{\text{sen}^2 B} + \frac{l_c}{\text{sen}^2 C} \geq 3$$

con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Problema 3.19 (IMO, 1997) Sean x_1, ..., x_n números reales con $|x_1 + \cdots + x_n| = 1$ y $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$, para $i = 1, ..., n$. Muestre que existe una permutación y_1, ..., y_n de x_1, ..., x_n tal que

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Problema 3.20 (Repúblicas Checa y Eslovaca, 1998) Sean a, b, c números reales positivos. Existe un triángulo con lados de longitud a, b, c si y sólo si existen números x, y, z, tales que

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{a}{x}, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = \frac{b}{y}, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{c}{z}.$$

Problema 3.21 (Hungría, 1998) Sea $ABCDEF$ un hexágono centralmente simétrico y P, Q, R puntos sobre los lados AB, CD, EF, respectivamente. Muestre que el área del triángulo PQR es a lo más un medio del área del hexágono.

Problema 3.22 (Irán, 1998) Sean x_1, x_2, x_3 y x_4 números reales positivos que cumplen $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Muestre que

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geq \text{máx}\left\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right\}.$$

Problema 3.23 (Irán, 1998) Sean x, y, z números mayores que 1 y tales que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Muestre que

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Problema 3.24 (Mediterránea, 1998) Sea $ABCD$ un cuadrado inscrito en una circunferencia. Si M es un punto en el arco AB, muestre que

$$MC \cdot MD \geq 3\sqrt{3}MA \cdot MB.$$

Problema 3.25 (Nórdica, 1998) Sea P un punto dentro de un triángulo equilátero ABC con lados de longitud a. Si las rectas AP, BP y CP intersectan los lados BC, CA y AB del triángulo en L, M y N, respectivamente, muestre que

$$PL + PM + PN < a.$$

Problema 3.26 (España, 1998) Una recta que contiene al centroide G del triángulo ABC intersecta el lado AB en P y el lado CA en Q. Muestre que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

Problema 3.27 (Armenia, 1999) Sea O el centro del circuncírculo del triángulo acutángulo ABC. Las rectas CO, AO y BO intersectan, por segunda vez, al circuncírculo de los triángulos AOB, BOC y AOC en C_1, A_1 y B_1, respectivamente. Muestre que

$$\frac{AA_1}{OA_1} + \frac{BB_1}{OB_1} + \frac{CC_1}{OC_1} \geq \frac{9}{2}.$$

Problema 3.28 (Balcánica, 1999) Sea ABC un triángulo acutángulo y sean L, M, N los pies de las perpendiculares desde G, el centroide de ABC, a los lados BC, CA, AB, respectivamente. Muestre que

$$\frac{4}{27} < \frac{(LMN)}{(ABC)} \leq \frac{1}{4}.$$

Problema 3.29 (Bielorusia, 1999) Sean a, b, c números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Muestre que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 3.30 (Repúblicas Checa y Eslovaca, 1999) Para números positivos a, b y c, muestre que

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

Problema 3.31 (Irlanda, 1999) Sean a, b, c, d números reales positivos con $a+b+c+d=1$. Muestre que

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geq\frac{1}{2}.$$

Problema 3.32 (Italia, 1999) Sean D y E puntos sobre los lados AB y CA de un triángulo ABC, respectivamente, de manera que DE es paralela a BC y DE es tangente al incírculo de ABC. Muestre que

$$DE\leq\frac{AB+BC+CA}{8}.$$

Problema 3.33 (Polonia, 1999) Sea D un punto sobre el lado BC del triángulo ABC tal que $AD>BC$. Considere un punto E sobre el lado CA de manera que $\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{AD-BC}$. Muestre que $AD>BE$.

Problema 3.34 (Rumania, 1999) Sean a, b, c números reales positivos tales que $ab+bc+ca\leq 3abc$. Muestre que $a+b+c\leq a^3+b^3+c^3$.

Problema 3.35 (Rumania, 1999) Sean x_1, x_2, ..., x_n números reales positivos tales que $x_1x_2\cdots x_n=1$. Muestre que

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leq 1.$$

Problema 3.36 (Rumania, 1999) Sea $n\geq 2$ un entero positivo y sean x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n números reales positivos tales que $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. Muestre que

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leq\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}.$$

Problema 3.37 (Rusia, 1999) Sean a, b y c números reales positivos con $abc=1$. Muestre que si $a+b+c\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ entonces $a^n+b^n+c^n\leq\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}$, para todo n entero positivo.

Problema 3.38 (Rusia, 1999) Si $\{x\}=x-[x]$ es la parte fraccionaria del número x. Muestre que, para cada entero positivo n,

$$\sum_{j=1}^{n^2}\left\{\sqrt{j}\right\}\leq\frac{n^2-1}{2}.$$

Problema 3.39 (Rusia, 1999) Los números reales positivos x, y satisfacen $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Muestre que

$$x^3 + y^3 \leq 2.$$

Problema 3.40 (San Petesburgo, 1999) Sean $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$ números reales. Muestre que

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n.$$

Problema 3.41 (Turquía, 1999) Muestre que $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc$, para todos los números reales que satisfacen $0 \leq a \leq b \leq c$.

Problema 3.42 (Reino Unido, 1999) Tres números reales no negativos a, b y c satisfacen $a + b + c = 1$. Muestre que

$$7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc.$$

Problema 3.43 (E.U., 1999) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Muestre que

$$|AB - CD| + |AD - BC| \geq 2\,|AC - BD|\,.$$

Problema 3.44 (APMO, 1999) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales que satisfacen, $a_{i+j} \leq a_i + a_j$, para toda $i, j = 1, 2, \ldots$. Muestre que

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n, \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Problema 3.45 (IMO, 1999) Sea $n \geq 2$ un entero dado.

(a) Determine la menor constante C para la cual se verifica la desigualdad

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4,$$

para todos los números reales no negativos $x_1, ..., x_n$.

(b) Para esta constante C determine cuando ocurre la igualdad.

Problema 3.46 (Repúblicas Checa y Eslovaca, 2000) Muestre que para todos los números reales positivos a y b,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Problema 3.47 (Corea, 2000) Los números reales a, b, c, x, y, z satisfacen $a \geq b \geq c > 0$ y $x \geq y \geq z > 0$. Muestre que

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

Problema 3.48 (Mediterranea, 2000) Sean P, Q, R, S los puntos medios de los lados BC, CD, DA, AB, respectivamente, del cuadrilátero convexo $ABCD$. Muestre que

$$4(AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2) \leq 5(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2).$$

Problema 3.49 (Austria-Polonia, 2000) Sean x, y, z números reales no negativos tales que $x + y + z = 1$. Muestre que

$$2 \leq (1-x^2)^2 + (1-y^2)^2 + (1-z^2)^2 \leq (1+x)(1+y)(1+z).$$

Problema 3.50 (IMO, 2000) Sean a, b, c números reales positivos con $abc = 1$. Muestre que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Problema 3.51 (Balcánica, 2001) Sea a, b, c números reales positivos tales que $abc \leq a+b+c$ su suma. Muestre que

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}\,abc.$$

Problema 3.52 (Brasil, 2001) Muestre que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para todos los números reales positivos a, b, c.

Problema 3.53 (Polonia, 2001) Muestre que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i$$

se tiene para cada entero $n \geq 2$ y para todos los números reales no negativos x_1, x_2, ..., x_n.

Problema 3.54 (Austria-Polonia, 2001) Muestre que

$$2 < \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leq 3,$$

donde a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo.

Problema 3.55 (IMO, 2001) Muestre que para cualesquiera números reales positivos a, b y c se cumple

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Problema 3.56 (Lista corta IMO, 2001) Muestre que para todos los números reales x_1, x_2, ..., x_n,

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Problema 3.57 (Austria, 2002) Sean a, b, c números reales tales que existen α, β, $\gamma \in \{-1,1\}$, con $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. Determine el valor positivo más pequeño de $\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right)^2$.

Problema 3.58 (Balcánica, 2002) Muestre que

$$\frac{2}{b(a+b)} + \frac{2}{c(b+c)} + \frac{2}{a(c+a)} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2},$$

para cualesquiera números reales positivos a, b, c.

Problema 3.59 (Canadá, 2002) Muestre que para cualesquiera números reales positivos a, b, c,

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c,$$

y determine cuándo ocurre la igualdad.

Problema 3.60 (Irlanda, 2002) Muestre que para cualesquiera números reales positivos x, y, z menores que 1, se tiene que

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}.$$

Problema 3.61 (Rioplatense, 2002) Sean a, b, c números reales positivos. Muestre que

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1.$$

Problema 3.62 (Rioplatense, 2002) Sean a, b, c números reales positivos. Muestre que

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq \frac{9}{a+b+c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Problema 3.63 (Rusia, 2002) Muestre que $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$, para números reales positivos x, y, z tales que $x + y + z = 3$.

Problema 3.64 (APMO, 2002) Los números reales positivos a, b, c satisfacen $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Muestre que

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Problema 3.65 (Irlanda, 2003) Las longitudes a, b, c de los lados de un triángulo cumplen que $a+b+c=2$. Muestre que

$$1 \leq ab+bc+ca-abc \leq 1+\frac{1}{27}.$$

Problema 3.66 (Rumania, 2003) Muestre que en cualquier triángulo ABC la siguiente desigualdad es verdadera

$$\frac{1}{m_b m_c}+\frac{1}{m_c m_a}+\frac{1}{m_a m_b} \leq \frac{\sqrt{3}}{S},$$

donde S es el área del triángulo y m_a, m_b, m_c son las longitudes de las medianas.

Problema 3.67 (Rumania, 2003) Sean a, b, c, d números reales positivos con $abcd=1$. Muestre que

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d} \geq 4.$$

Problema 3.68 (Rumania, 2003) En un triángulo ABC, sean l_a, l_b, l_c las longitudes de las bisectrices, y sea s el semiperímetro. Muestre que

$$l_a+l_b+l_c \leq \sqrt{3}s.$$

Problema 3.69 (Rusia, 2003) Sean a, b, c números reales positivos con $a+b+c=1$. Muestre que

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

Problema 3.70 (APMO, 2003) Muestre que

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{2^{\frac{1}{n}}}{2},$$

donde $n > 1$ es un entero y a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo con perímetro uno.

Problema 3.71 (IMO, 2003) Dada $n > 2$ y números reales $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, muestre que

$$\left(\sum_{i,j} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2}{3}(n^2-1)\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2,$$

donde la igualdad se da si y sólo si x_1, x_2, ... , x_n forman una progresión aritmética.

Problema 3.72 (Lista corta Iberoamericana, 2004) Si los números positivos x_1, x_2,..., x_n satisfacen que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, muestre que

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)} + \cdots + \frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)} \geq \frac{n^2}{3}.$$

Problema 3.73 (Repúblicas Checa y Eslovaca, 2004) Sea $P(x) = ax^2+bx+c$ un polinomio cuadrático con coeficientes reales no negativos. Muestre que, para cualquier número positivo x,

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2.$$

Problema 3.74 (Croacia, 2004) Muestre que la desigualdad

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$

es válida para todos los números reales positivos a, b, c.

Problema 3.75 (Estonia, 2004) Sean a, b, c números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Muestre que

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geq 1.$$

Problema 3.76 (Irán, 2004) Sean x, y, z números reales para los cuales $xyz = -1$. Muestre que

$$x^4 + y^4 + z^4 + 3(x + y + z) \geq \frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y}.$$

Problema 3.77 (Corea, 2004) Sean R y r el circunradio y el inradio del triángulo acutángulo ABC, respectivamente. Suponga que $\angle A$ es el ángulo mayor del triángulo. Sea M el punto medio de BC y sea X la intersección de las tangentes al circuncírculo de ABC en B y C. Muestre que

$$\frac{r}{R} \geq \frac{AM}{AX}.$$

Problema 3.78 (Moldovia, 2004) Muestre que para cualesquiera números reales a, b, $c \geq 0$, la siguiente desigualdad se cumple

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}.$$

Problema 3.79 (Ucrania, 2004) Sean x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 1$. Muestre que

$$\sqrt{xy + z} + \sqrt{yz + x} + \sqrt{zx + y} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}.$$

Problema 3.80 (Ucrania, 2004) Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc \geq 1$. Muestre que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca.$$

Problema 3.81 (Rumania, 2004) Encuentre todos los números reales positivos a, b, c que satisfacen las desigualdades

$$4(ab + bc + ca) - 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3).$$

Problema 3.82 (Rumania, 2004) Los números reales a, b, c satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Muestre que

$$|a| + |b| + |c| - abc \leq 4.$$

Problema 3.83 (Rumania, 2004) Considere el triángulo ABC y sea O un punto interior de ABC. Las rectas OA, OB, OC intersectan los lados del triángulo en A_1, B_1, C_1, respectivamente. Sean R_1, R_2, R_3 los radios de los circuncírculos de los triángulos OBC, OCA, OAB, respectivamente, y sea R el radio del circuncírculo del triángulo ABC. Muestre que

$$\frac{OA_1}{AA_1}R_1 + \frac{OB_1}{BB_1}R_2 + \frac{OC_1}{CC_1}R_3 \geq R.$$

Problema 3.84 (Rumania, 2004) Sea $n \geq 2$ un número entero y sean a_1, a_2, ..., a_n números reales. Muestre que para cualquier subconjunto no vacío S de $\{1, 2, ..., n\}$, la siguiente desigualdad se cumple

$$\left(\sum_{i \in S} a_i\right)^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i + \cdots + a_j)^2.$$

Problema 3.85 (APMO, 2004) Sean a, b, c números reales positivos. Muestre que

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Problema 3.86 (Lista corta IMO, 2004) Sean a, b y c números reales positivos tales que $ab + bc + ca = 1$. Muestre que

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{abc} + 6(a + b + c)} \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{abc}.$$

Problema 3.87 (IMO, 2004) Sea $n \geq 3$ un número entero. Sean t_1, t_2, $\ldots$, t_n números reales positivos tales que

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Muestre que t_i, t_j, t_k son las longitudes de los lados de un triángulo, para todo i, j, k, con $1 \leq i < j < k \leq n$.

Problema 3.88 (Japón, 2005) Sean a, b y c números reales positivos, tales que $a + b + c = 1$. Muestre que

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + a\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

Problema 3.89 (Rusia, 2005) Sean x_1, x_2, $\ldots$, x_6 números reales tales que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 6$ y $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 0$. Muestre que $x_1 x_2 \cdots x_6 \leq \frac{1}{2}$.

Problema 3.90 (Reino Unido, 2005) Sean a, b, c números reales positivos. Muestre que

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Problema 3.91 (APMO, 2005) Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 8$. Muestre que

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

Problema 3.92 (IMO, 2005) Sean x, y, z números reales positivos tales que $xyz \geq 1$. Muestre que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Problema 3.93 (Balcanes, 2006) Sean a, b, c números reales positivos, muestre que

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Problema 3.94 (Estonia, 2006) Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y sea A', B' y C' los circuncentros de los triángulos BCO, CAO y

ABO, respectivamente. Muestre que el área del triángulo ABC es menor o igual que el área del triángulo $A'B'C'$.

Problema 3.95 (Lituania, 2006) Sean a, b, c números reales positivos, muestre que

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

Problema 3.96 (Turquía, 2006) Sean a_1, a_2, $\dots$, a_n números reales positivos tales que

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=A.$$

Muestre que

$$\sum_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j}\geq\frac{(n-1)^2A}{A-1}.$$

Problema 3.97 (Iberoamericana, 2006) Considere n números reales a_1, a_2, $\dots$, a_n, no necesariamente distintos. Sea d la diferencia entre el máximo y el mínimo valor de los números y sea $s=\sum_{i<j}|a_i-a_j|$. Muestre que

$$(n-1)d\leq s\leq\frac{n^2d}{4}.$$

Determine las condiciones en los n números para que se cumpla la igualdad.

Problema 3.98 (IMO, 2006) Determine el mínimo número real M tal que la desigualdad

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right|\leq M(a^2+b^2+c^2)^2,$$

se cumpla, para cualesquiera números reales a, b, c.

Problema 3.99 (Bulgaria, 2007) Encuentre todos los enteros positivos n tal que si a, b, c son números reales no negativos con $a+b+c=3$, entonces

$$abc(a^n+b^n+c^n)\leq 3.$$

Problema 3.100 (Bulgaria, 2007) Si a, b, c son números reales positivos, muestre que

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3.$$

Problema 3.101 (China, 2007) Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo con $a+b+c=3$, encuentre el mínimo de

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}.$$

Problema 3.102 (Grecia, 2007) Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo, muestre que

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}+\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq ab+bc+ca.$$

Problema 3.103 (Irán, 2007) Si a, b, c son tres números reales positivos, muestre que

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1.$$

Problema 3.104 (Mediterranea, 2007) Sean x, y, z números reales tales que $xy+yz+zx=1$. Muestre que $xz<\frac{1}{2}$. ¿Es posible mejorar la cota de $\frac{1}{2}$?

Problema 3.105 (Mediterranea, 2007) Sea $x>1$ un número real positivo que no sea un entero. Muestre que

$$\left(\frac{x+\{x\}}{[x]}-\frac{[x]}{x+\{x\}}\right)+\left(\frac{x+[x]}{\{x\}}-\frac{\{x\}}{x+[x]}\right)>\frac{9}{2},$$

donde $[x]$ y $\{x\}$ representan la parte entera y la parte fraccionaria de x, respectivamente.

Problema 3.106 (Perú, 2007) Sean a, b, c números reales positivos tales que $a+b+c\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Muestre que

$$a+b+c\geq\frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}.$$

Problema 3.107 (Rumania, 2007) Sean a, b, c números reales positivos tales que
$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1.$$
Muestre que
$$a+b+c\geq ab+bc+ca.$$

Problema 3.108 (Rumania, 2007) Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB=AC$. Para todo punto P en el interior del triángulo ABC, considere la circunferencia con centro en A y radio AP; sean M y N las intersecciones de los lados AB y AC con la circunferencia, respectivamente. Determine la posición de P de tal forma que la suma $MN+BP+CP$ sea mínima.

Problema 3.109 (Rumania, 2007) Los puntos M, N, P en los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, respectivamente, son tales que el triángulo MNP es acutángulo. Sea x la longitud de la altura menor del triángulo ABC y X la longitud de la altura mayor del triángulo MNP. Muestre que $x\leq 2X$.

Problema 3.110 (APMO, 2007) Sean x, y, z números reales positivos tales que $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Muestre que
$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1.$$

Problema 3.111 (Báltica, 2008) Si los números reales positivos a, b, c satisfacen que $a^2+b^2+c^2=3$, muestre que
$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}.$$
¿Bajo que circunstancias se tiene la igualdad?

Problema 3.112 (Canadá, 2008) Sean a, b, c números reales positivos tales que $a+b+c=1$. Muestre que
$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}.$$

Problema 3.113 (Irán, 2008) Encuentre el menor número real K tal que, para cualesquiera números reales positivos x, y, z, se cumple la siguiente desigualdad

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}\leq K\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Problema 3.114 (Irlanda, 2008) Si los números reales positivos a, b, c, d satisfacen que $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Muestre que

$$a^2b^2cd+ab^2c^2d+abc^2d^2+a^2bcd^2+a^2bc^2d+ab^2cd^2\leq\frac{3}{32}.$$

Problema 3.115 (Irlanda, 2008) Sean x, y, z números reales positivos, tales que $xyz\geq 1$. Muestre que:
(a) $27\leq(1+x+y)^2+(1+y+z)^2+(1+z+x)^2$,
(b) $(1+x+y)^2+(1+y+z)^2+(1+z+x)^2\leq 3(x+y+z)^2$.
La igualdad es cierta si y sólo si $x=y=z=1$.

Problema 3.116 (Rumania, 2008) Si a, b, c son números reales positivos, tales que $ab+bc+ca=3$, muestre que

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{abc}.$$

Problema 3.117 (Rumania, 2008) Determine el máximo valor para el número real k si

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-k\right)\geq k,$$

para cualesquiera números reales a, b, $c\geq 0$, que cumplen además que $a+b+c=ab+bc+ca$.

Problema 3.118 (Serbia, 2008) Sean a, b, c números reales positivos tales que $a+b+c=1$. Muestre que

$$a^2+b^2+c^2+3abc\geq\frac{4}{9}.$$

Problema 3.119 (Vietnam, 2008) Sean x, y, z números reales distintos y no-negativos. Muestre que

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}.$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Problema 3.120 (IMO, 2008) (i) Si x, y, z son tres números reales distintos a 1 y tales que $xyz=1$. Muestre que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1.$$

(ii) Muestre que la igualdad es cierta para un número infinito de números racionales x, y, z.

Capítulo 4

Soluciones a los Ejercicios y Problemas

En este capítulo presentamos las soluciones o sugerencias de los ejercicios y problemas que aparecen en este libro. En las secciones 1 y 2 damos las soluciones a los ejercicios de los capítulos 1 y 2, respectivamente. En la sección 3 las soluciones a los problemas del capítulo 3. Le recomendamos al lector que no consulte este capítulo sin antes haber intentado resolver los ejercicios y problemas él mismo.

4.1. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1

Solución 1.1 Se sigue de la definición de $a < b$ y la propiedad 1.1.1 para el número $a - b$.

Solución 1.2 (i) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$. Use también que $(-a)(-b) = ab$. (ii) $(-a)b > 0$. (iii) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$, use ahora la propiedad 1.1.2. (iv) Use la propiedad 1.1.2. (v) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$. (vi) $a\frac{1}{a} = 1 > 0$. (vii) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$. $(viii)$ Use (vi) y la propiedad 1.1.3. (ix) Muestre que $ac < bc$ y que $bc < bd$. (x) Use la propiedad 1.1.3 con $a - 1 > 0$ y $a > 0$. (xi) Use la propiedad 1.1.3 con $1 - a > 0$ y $a > 0$.

Solución 1.3 (i) $a^2 < b^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) > 0$. (ii) Si $b > 0$, entonces $\frac{1}{b} > 0$, ahora use el ejemplo 1.1.4 (ii).

Solución 1.4 Para (i), (ii) y (iii) use la definición, y para (iv) y (v) recuerde que $|a|^2 = a^2$.

Solución 1.5 (i) $x \leq |x|$ y $-x \leq |x|$. (ii) Considere $|a| = |a-b+b|$ y $|b| = |b-a+a|$ y aplique la desigualdad del triángulo. (iii) $(x^2+xy+y^2)(x-y) = x^3-y^3$. (iv) $(x^2-xy+y^2)(x+y) = x^3+y^3$.

Solución 1.6 Si a, b o c son cero, tenemos la igualdad. Entonces, suponga que $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$, ya que la desigualdad es simétrica en a, b y c. Dividiendo entre $|a|$, la desigualdad es equivalente a

$$1 + \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|1+\frac{b}{a}\right| - \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right| - \left|1+\frac{c}{a}\right| + \left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right| \geq 0.$$

Como $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$ y $\left|\frac{c}{a}\right| \leq 1$, se tiene que $\left|1+\frac{b}{a}\right| = 1+\frac{b}{a}$ y $\left|1+\frac{c}{a}\right| = 1+\frac{c}{a}$. Entonces, es suficiente probar que

$$\left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right| - \left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right) + \left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right| \geq 0.$$

Ahora, use la desigualdad del triángulo y el ejercicio 1.5.

Solución 1.7 (i) Use que $0 \leq b \leq 1$ y $1+a > 0$, para ver que

$$0 \leq b(1+a) \leq 1+a \quad \Rightarrow \quad 0 \leq b-a \leq 1-ab \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{b-a}{1-ab} \leq 1.$$

(ii) La desigualdad de la izquierda es clara. Como $1+a \leq 1+b$, se tiene que $\frac{1}{1+b} \leq \frac{1}{1+a}$, ahora vea que,

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+a} = \frac{a+b}{1+a} \leq 1.$$

(iii) Para la desigualdad izquierda use que $ab^2 - ba^2 = ab(b-a)$ es producto de números reales no negativos. Para la desigualdad derecha note que, $b \leq 1 \ \Rightarrow b^2 \leq b \quad -b \leq -b^2$, ahora termine así,

$$ab^2 - ba^2 \leq ab^2 - b^2a^2 = b^2(a-a^2) \leq a - a^2 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2}-a)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Solución 1.8 Muestre, más generalmente, que $x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+x} > \sqrt{2}$ y que $x > \sqrt{2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+x} < \sqrt{2}$.

Solución 1.9 $ax + by \geq ay + bx \Leftrightarrow (a-b)(x-y) \geq 0.$

Solución 1.10 Suponga que $x \geq y$. Luego, utilice el ejercicio anterior con $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{y^2}$, $\frac{1}{\sqrt{y}}$ y $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Solución 1.11 Observe que

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) = 2(a-b)(c-d) = 2(a-b)^2 \geq 0.$$

Solución 1.12 Se sigue de

$$\begin{aligned} f(a,c,b,d) - f(a,b,c,d) &= (a-c)^2 - (a-b)^2 + (b-d)^2 - (c-d)^2 \\ &= (b-c)(2a-b-c) + (b-c)(b+c-2d) \\ &= 2(b-c)(a-d) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) - f(a,b,d,c) &= (b-c)^2 - (b-d)^2 + (d-a)^2 - (c-a)^2 \\ &= (d-c)(2b-c-d) + (d-c)(c+d-2a) \\ &= 2(d-c)(b-a) > 0. \end{aligned}$$

Solución 1.13 Para que las expresiones estén bien definidas es necesario que $x \geq -\frac{1}{2}$ y $x \neq 0$. Multiplique el numerador y el denominador por $\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2$. Realice simplificaciones, para obtener $2\sqrt{2x+1} < 7$; ahora resuelva para x.

Solución 1.14 Como $4n^2 < 4n^2 + n < 4n^2 + 4n + 1$, se tiene que, $2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n+1$. Luego, su parte entera es $2n$ y lo que hay que mostrar es entonces $\sqrt{4n^2+n} < 2n + \frac{1}{4}$, que es inmediato al tomar cuadrados.

Solución 1.15 Como $(a^3-b^3)(a^2-b^2) \geq 0$, se tiene que $a^5+b^5 \geq a^2b^2(a+b)$, luego

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} = \frac{abc^2}{a^2b^2c^2(a+b)+abc^2} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Análogamente, $\frac{bc}{b^5+c^5+bc} \leq \frac{a}{a+b+c}$ y $\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{b}{a+b+c}$. Por lo que,

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c},$$

pero, $\frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = \frac{c+a+b}{a+b+c} = 1$.

Solución 1.16 Considere $p(x) = ax^2 + bx + c$, por hipótesis $p(1) = a+b+c$ y $p(-1) = a-b+c$ son no negativos. Como $a > 0$, el mínimo de p se logra en $\frac{-b}{2a}$

y su valor es $\frac{4ac-b^2}{4a} < 0$. Si x_1, x_2 son las raíces, se tiene que $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ y $\frac{c}{a} = x_1 x_2$, por lo que $\frac{a+b+c}{a} = (1 - x_1)(1 - x_2)$, $\frac{a-b+c}{a} = (1 + x_1)(1 + x_2)$ y $\frac{a-c}{a} = 1 - x_1 x_2$. Observe que, $(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 0$, $(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 0$ y $1 - x_1 x_2 \geq 0$, garantizan que $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$.

Solución 1.17 Si las tres desigualdades ocurren, debe suceder que a, b y c son menores que 1, y que $a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}$. Por otro lado, para $0 \leq x \leq 1$ siempre sucede que $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$, se tiene que $a(1 - b)b(1 - c)c(1 - a) \leq \frac{1}{64}$.

Solución 1.18 Use la desigualdad $MG - MA$ con $a = 1$, $b = x$.

Solución 1.19 Use la desigualdad $MG - MA$, con $a = x$ y $b = \frac{1}{x}$.

Solución 1.20 Use la desigualdad $MG - MA$, con $a = x^2$ y $b = y^2$.

Solución 1.21 En el ejercicio anterior sume $x^2 + y^2$ de ambos lados.

Solución 1.22 Use la desigualdad $MG - MA$ con $a = \frac{x+y}{x}$, $b = \frac{x+y}{y}$ y use también la $MG - MA$, para x y y. O bien, reduzca al ejercicio 1.20.

Solución 1.23 Use la desigualdad $MG - MA$, con ax y $\frac{b}{x}$.

Solución 1.24 Use la desigualdad $MG - MA$, con $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$.

Solución 1.25 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$, simplifique y acote usando $0 < b \leq a$.

Solución 1.26 $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Solución 1.27 $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Solución 1.28 $xy + zx \geq 2x\sqrt{yz}$.

Solución 1.29 Vea el ejercicio 1.27.

Solución 1.30 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$.

Solución 1.31 $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy^2z}{zx}} = 2y$.

Solución 1.32 $\frac{x^2+(y^2+z^2)}{2} \geq x\sqrt{y^2 + z^2}$.

Solución 1.33 $x^4+y^4+8=x^4+y^4+4+4\geq 4\sqrt[4]{x^4y^416}=8xy.$

Solución 1.34 $(a+b+c+d)\geq 4\sqrt[4]{a\,b\,c\,d}$, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{a\,b\,c\,d}}.$

Solución 1.35 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4\sqrt[4]{\frac{a\,b\,c\,d}{b\,c\,d\,a}}=4.$

Solución 1.36 $(x_1+\cdots+x_n)\geq n\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$, $\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1\cdots x_n}}.$

Solución 1.37 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geq n\sqrt[n]{\frac{a_1\cdots a_n}{b_1\cdots b_n}}=n.$

Solución 1.38 $a^n-1>n\left(a^{\frac{n+1}{2}}-a^{\frac{n-1}{2}}\right)\Leftrightarrow (a-1)\left(a^{n-1}+\cdots+1\right)>na^{\frac{n-1}{2}}(a-1)\Leftrightarrow \frac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{n}>a^{\frac{n-1}{2}}$, pero $\frac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{n}>\sqrt[n]{a^{\frac{(n-1)n}{2}}}=a^{\frac{n-1}{2}}.$

Solución 1.39 $1=\left(\frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1+c}{2}\right)\geq\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{abc}.$

Solución 1.40 Aplicando la desigualdad $MG-MA$, se tiene, $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\cdot\frac{b^3}{c}\cdot bc}=3ab$. Análogamente, $\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ca\geq 3bc$ y $\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+ab\geq 3ca$. Por lo que, $2(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a})+(ab+bc+ca)\geq 3(ab+bc+ca)$.

Segunda Solución. También se puede resolver aplicando el ejercicio 1.107.

Solución 1.41 Si $abc=0$, el resultado es claro. Si $abc>0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}&=\frac{1}{2}\left(a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+b\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right)\\&\geq\frac{1}{2}(2a+2b+2c)\end{aligned}$$

y el resultado se sigue.

Solución 1.42 Aplique la desigualdad $MG-MA$ dos veces, $a^2b+b^2c+c^2a\geq 3abc$, $ab^2+bc^2+ca^2\geq 3abc$.

Solución 1.43 $\frac{1+ab}{1+a}=\frac{abc+ab}{1+a}=ab\left(\frac{1+c}{1+a}\right).$

$$\begin{aligned}\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}&=ab\left(\frac{1+c}{1+a}\right)+bc\left(\frac{1+a}{1+b}\right)+ca\left(\frac{1+b}{1+c}\right)\\&\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3.\end{aligned}$$

Solución 1.44 $\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)(a+b+c)\geq\frac{9}{2}$, es equivalente a mostrar que

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)(a+b+b+c+c+a)\geq 9,$$

lo cual se sigue del ejercicio 1.36. Para la otra desigualdad use $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$. Vea el ejercicio 1.22.

Solución 1.45 Note que,

$$\frac{n+H_n}{n}=\frac{(1+1)+(1+\frac{1}{2})+\cdots+(1+\frac{1}{n})}{n}.$$

Ahora aplique la desigualdad $MG-MA$.

Solución 1.46 Defina, $y_i=\frac{1}{1+x_i}\Rightarrow x_i=\frac{1}{y_i}-1=\frac{1-y_i}{y_i}$. Ahora, observe que $y_1+\ldots+y_n=1$ implica que $1-y_i=\sum_{j\neq i}y_j$, luego, $\sum_{j\neq i}y_j\geq(n-1)\left(\prod_{j\neq i}y_j\right)^{\frac{1}{n-1}}$ y

$$\prod_i x_i=\prod_i\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)=\frac{\prod\limits_i\left(\sum_{j\neq i}y_j\right)}{\prod\limits_i y_i}\geq\frac{(n-1)^n\prod\limits_i\left(\prod_{j\neq i}y_j\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\prod\limits_i y_i}=(n-1)^n.$$

Solución 1.47 Defina $a_{n+1}=1-(a_1+\cdots+a_n)$ y $x_i=\frac{1-a_i}{a_i}$, para $i=1,...,n+1$. Aplique directamente el ejercicio 1.46.

Solución 1.48 $\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+a_i}=1\Rightarrow\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{1+a_i}=n-1$. Observe que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i}-(n-1)\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{a_i}}&=\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+a_i}\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i}-\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{1+a_i}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{a_i}}\\&=\sum_{i,j}\frac{a_i-a_j}{(1+a_j)\sqrt{a_i}}=\sum_{i>j}\frac{(\sqrt{a_i}\sqrt{a_j}-1)(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2(\sqrt{a_i}+\sqrt{a_j})}{(1+a_i)(1+a_j)\sqrt{a_i}\sqrt{a_j}}.\end{aligned}$$

Como $1\geq\frac{1}{1+a_i}+\frac{1}{1+a_j}=\frac{2+a_i+a_j}{1+a_i+a_j+a_ia_j}$, tenemos que $a_ia_j\geq 1$. Por lo tanto, los términos de la última suma son positivos.

Solución 1.49 Sean $S_a=\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2}{a_i+b_i}$ y $S_b=\sum_{i=1}^n\frac{b_i^2}{a_i+b_i}$.

$$S_a-S_b=\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2-b_i^2}{a_i+b_i}=\sum_{i=1}^n a_i-\sum_{i=1}^n b_i=0,$$

luego $S_a = S_b = S$. Se tiene entonces,

$$2S = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + b_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + b_i)^2}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

de donde la desigualdad se sigue después de usar el ejercicio 1.21.

Solución 1.50 Como la desigualdad es homogénea[1] se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $abc = 1$. Haciendo $x = a^3$, $y = b^3$ y $z = c^3$, la desigualdad es equivalente a,

$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1.$$

Sean $A = x + y + 1$, $B = y + z + 1$ y $C = z + x + 1$, luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \leq 1 &\Leftrightarrow (A-1)(B-1)(C-1) - (A+B+C) + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) - 2(x+y+z) \geq 2 \\ &\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx-2) \geq 3. \end{aligned}$$

Ahora, use que

$$\frac{x+y+z}{3} \geq (xzy)^{\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad \frac{xy+yz+zx}{3} \geq (xyz)^{\frac{2}{3}}.$$

Segunda Solución. Use las ideas de la solución del ejercicio 1.15. Inicie de que $(a^2 - b^2)(a - b) \geq 0$ para garantizar que $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$, luego

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{c}{abc(a+b+c)}.$$

Solución 1.51 Note que $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right) &= 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{abc} \\ &\geq 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + \frac{1}{abc} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq 4^3. \end{aligned}$$

[1] Una función $f(a, b, \ldots)$ es homogénea si para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(ta, tb, \ldots) = tf(a, b, \ldots)$. Luego, una desigualdad de la forma $f(a, b, \ldots) \geq 0$, para el caso de una función homogénea es equivalente a $f(ta, tb, \ldots) \geq 0$ para cualquier $t > 0$.

Solución 1.52 La desigualdad es equivalente a $\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right)\left(\frac{b+c}{c}\right) \geq 8$. Use ahora, la desigualdad $MG-MA$ para cada término del producto, y la desigualdad se resuelve inmediatamente.

Solución 1.53 Note que,

$$\begin{aligned}\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} &= \frac{(a+1)(b+1)(c+1)-2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &= 1-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{3}{4},\end{aligned}$$

que es equivalente a $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$, y esta última desigualdad es inmediata de la desigualdad $\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{b+1}{2}\right)\left(\frac{c+1}{2}\right) \geq \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = 1$.

Solución 1.54 Vea que es similar al ejercicio 1.52.

Solución 1.55 Aplique la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica para obtener

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Puede concluir también que si la igualdad se alcanza entonces $a = b = c$.

Solución 1.56 Utilice primero que $(a+b)^2 \geq 4ab$, luego tome en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i b_i} \geq 4 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a_i+b_i)^2}.$$

Ahora, use el ejercicio 1.36, para mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a_i+b_i)^2} \geq n^2.$$

Solución 1.57 Por la desigualdad $MG-MA$, se tiene que $xy+yz \geq 2y\sqrt{xz}$. Sumando desigualdades similares se obtiene $2(xy+yz+zx) \geq 2(x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy})$. Nuevamente, por $MG-MA$, se tiene que $x^2+x^2+y^2+z^2 \geq 4x\sqrt{yz}$. Sumando los resultados similares, una vez más, se llega a que $x^2+y^2+z^2 \geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}$. Ahora, sumando ambas desigualdades, se obtiene el resultado $\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}$.

Solución 1.58 La desigualdad $MG-MA$ lleva a que $x^4+y^4 \geq 2x^2y^2$. Usando $MG-MA$ nuevamente se tiene que $2x^2y^2+z^2 \geq \sqrt{8}xyz$. O bien, directamente se tiene que

$$x^4 + y^4 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^4y^4z^4}{4}} = \sqrt{8}xyz.$$

Solución 1.59 Por $MG - MA$, se tiene

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 2\frac{xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \geq 8.$$

La última desigualdad se deduce de $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$, ya que $(x-2)^2 \geq 0$.

Segunda Solución. Sean $a = x-1$, $b = y-1$, que son números positivos, entonces la desigualdad que se quiere demostrar es equivalente a $\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \geq 8$. Ahora bien, por $MG-MA$, tenemos que $(a+1)^2 \geq 4a$ y $(b+1)^2 \geq 4b$. Luego, $\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} \geq 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 8$. La última desigualdad es consecuencia del ejercicio 1.24.

Solución 1.60 Observe que (a, b, c) y (a^2, b^2, c^2) se ordenan de la misma forma, use la desigualdad (1.2).

Solución 1.61 Por el ejercicio anterior

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Observe que $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ y $(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2})$ se ordenan de la misma forma. Entonces, usando la desigualdad (1.2), se obtiene

$$\begin{aligned}
(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 &= \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \\
&\geq \frac{1}{a^2}\frac{1}{c} + \frac{1}{b^2}\frac{1}{a} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{b} \\
&= \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \\
&= a^2b + b^2c + c^2a.
\end{aligned}$$

Sumando las dos desigualdades, se obtiene el resultado.

Solución 1.62 Use la desigualdad (1.2) con $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ y $(a_1', a_2', a_3') = \left(\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}\right)$.

Solución 1.63 Use la desigualdad (1.2) con $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ y $(a'_1, a'_2, a'_3) = \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}\right)$.

Solución 1.64 Suponga que $a \leq b \leq c$, y considere $(a_1, a_2, a_3) = (a, b, c)$. Use la desigualdad del reacomodo (1.2) dos veces con $(a'_1, a'_2, a'_3) = (b, c, a)$ y (c, a, b), respectivamente. Desde luego, se está utilizando

$$(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{b+c-a}, \frac{1}{c+a-b}, \frac{1}{a+b-c}\right).$$

Solución 1.65 Utilice la misma idea que en el ejercicio anterior, pero con n variables.

Solución 1.66 Use el ejercicio anterior y el hecho que $\frac{s}{s-a_1} = 1 + \frac{a_1}{s-a_1}$.

Solución 1.67 Aplique el ejercicio 1.65 a la sucesión $a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_n$.

Solución 1.68 Aplique el ejemplo 1.4.11.

Solución 1.69 Note que $1 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$, y use el ejercicio anterior como sigue

$$\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

por lo tanto, $\frac{1}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$. Luego, $2(ab + bc + ca) \leq \frac{2}{3}$, y el resultado es evidente.

Segunda Solución. La desigualdad es equivalente a $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$ pero ésta se reduce a $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Solución 1.70 Sea $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ la media geométrica de los números dados y $(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\frac{x_1}{G}, \frac{x_1 x_2}{G^2}, \cdots, \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{G^n}\right)$.
Utilice el corolario 1.4.2, se tiene que

$$n \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} = \frac{G}{x_2} + \frac{G}{x_3} + \cdots + \frac{G}{x_n} + \frac{G}{x_1},$$

luego,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq G.$$

También, por el corolario 1.4.2,

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \cdots + \frac{x_n}{G},$$

entonces

$$G \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Las igualdades ocurren si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, es decir, si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solución 1.71 La desigualdad es equivalente a

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1} \geq \frac{a_1 \cdots a_n}{a_1} + \frac{a_1 \cdots a_n}{a_2} + \cdots + \frac{a_1 \cdots a_n}{a_n},$$

la cual se verifica usando la desigualdad del reacomodo varias veces.

Solución 1.72 Primero note que $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1-a_i}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-a_i}} - \sum_{i=1}^n \sqrt{1-a_i}$. Por la desigualdad $MG - MA$ se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-a_i}} &\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-a_i}}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1-a_i)}}} \\ &\geq \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1-a_i)}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

Más aún, la desigualdad de Cauchy-Schwarz sirve para mostrar que

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1-a_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (1-a_i)}\sqrt{n} = \sqrt{n(n-1)} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n}.$$

Solución 1.73 (i) $\sqrt{4a+1} < \frac{4a+1+1}{2} = 2a+1$. (ii) Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $u = (\sqrt{4a+1}, \sqrt{4b+1}, \sqrt{4c+1})$ y $v = (1,1,1)$.

Solución 1.74 Suponga que $a \geq b \geq c \geq d$ (los otros casos son análogos). Entonces, si $A = b+c+d$, $B = a+c+d$, $C = a+b+d$ y $D = a+b+c$, se tiene que $\frac{1}{A} \geq \frac{1}{B} \geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{D}$. Aplique la desigualdad de Tchebyshev dos veces para mostrar que

$$\frac{a^3}{A} + \frac{b^3}{B} + \frac{c^3}{C} + \frac{d^3}{D} \geq \frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right)$$

$$\begin{aligned}&\geq \frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)\\ &= \frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{A+B+C+D}{3}\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right).\end{aligned}$$

Ahora, use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para ver que

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ab+bc+cd+da = 1$$

y use la desigualdad $(A+B+C+D)(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}) \geq 16$.

Solución 1.75 Use la desigualdad del reacomodo con

$$(a_1,a_2,a_3) = \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \sqrt[3]{\frac{b}{c}}, \sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right), (b_1,b_2,b_3) = \left(\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}, \sqrt[3]{\left(\frac{b}{c}\right)^2}, \sqrt[3]{\left(\frac{c}{a}\right)^2}\right)$$

y permutación $(a_1', a_2', a_3') = \left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}, \sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)$, para obtener

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}.$$

Finalmente use que $abc = 1$.

Segunda Solución. Aplique la desigualdad entre $MG - MA$ de la siguiente manera:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{a}{b}\frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Análogamente, $\frac{1}{3}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq b$ y $\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq c$. Ahora sume las tres desigualdades.

Solución 1.76 Por hipótesis, para toda k, se tiene que $s - 2x_k > 0$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{s-2x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(s-2x_k)\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 = s^2.$$

Pero $0 < \sum_{k=1}^{n}(s-2x_k) = ns - 2s$, por lo que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{s-2x_k} \geq \frac{s}{n-2}.$$

Solución 1.77 La función $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ es convexa en $\mathbb{R}^+$.

Solución 1.78 La función $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$ es convexa en cada una de las variables, luego su máximo se alcanza en los extremos.

Solución 1.79 Si $x = 0$, entonces la desigualdad se reduce a $1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq 2$, que es verdadera ya que $y \geq 0$. Por simetría, la desigualdad es cierta para $y = 0$. Suponga ahora que $0 < x \leq 1$ y $0 < y \leq 1$. Sea $u \geq 0$ y $v \geq 0$ tales que $x = e^{-u}$ y $y = e^{-v}$, entonces la desigualdad se convierte en

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2u}}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2v}}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+e^{-(u+v)}}};$$

esto es,

$$\frac{f(u)+f(v)}{2} \leq f\left(\frac{u+v}{2}\right),$$

donde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$. Como $f''(x) = \frac{1-2e^{2x}}{e^{4x}(1+e^{-2x})^{5/2}}$, la función es cóncava en el intervalo $[0, \infty)$. Por lo tanto, la desigualdad anterior es verdadera.

Solución 1.80 Encuentre $f''(x)$.

Solución 1.81 Utilice $\log(\operatorname{sen} x)$ o bien

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right).$$

Solución 1.82 (i) Si $1+nx \leq 0$, la desigualdad es evidente ya que $(1+x)^n \geq 0$. Suponga que $(1+nx) > 0$. Aplique $MG-MA$ a los números $(1, 1, \ldots, 1, 1+nx)$ con $(n-1)$ unos.
(ii) Sean $a_1, \ldots, a_n$ números positivos y defina, para cada $j = 1, \ldots n$, $\sigma_j = \frac{a_1+\ldots+a_j}{j}$. Aplique la desigualdad de Bernoulli para mostrar que $\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right)^j \geq j\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}} - (j-1)$, lo que implica

$$\sigma_j^j \geq \sigma_{j-1}^j \left(j\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}} - (j-1)\right) = \sigma_{j-1}^{j-1}(j\sigma_j - (j-1)\sigma_{j-1}) = a_j \sigma_{j-1}^{j-1}.$$

Luego, $\sigma_n^n \geq a_n\sigma_{n-1}^{n-1} \geq a_na_{n-1}\sigma_{n-2}^{n-2} \geq \cdots \geq a_na_{n-1}\cdots a_1$.

Solución 1.83 Si $x \geq y \geq z$, se tiene que $x^n(x-y)(x-z) \geq y^n(x-y)(y-z)$ y $z^n(z-x)(z-y) \geq 0$.

Solución 1.84 Note que $x(x-z)^2+y(y-z)^2-(x-z)(y-z)(x+y-z) \geq 0$ si y sólo si $x(x-z)(x-y)+y(y-z)(y-x)+z(x-z)(y-z) \geq 0$. La desigualdad ahora se sigue de la desigualdad de Schür. O bien, la última expresión es simétrica en x, y y z, por lo que se puede suponer $x \geq z \geq y$, ahora regrese a la desigualdad original, donde claramente

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq 0 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

Solución 1.85 La desigualdad es homogénea, por lo que se puede suponer que $a+b+c=1$. Ahora los sumandos de la izquierda son de la forma $\frac{x}{(1-x)^2}$, y la función $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ es convexa, ya que $f''(x) = \frac{4+2x}{(1-x)^4} > 0$. Por la desigualdad de Jensen, $\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-b)^2}+\frac{c}{(1-c)^2} \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Solución 1.86 Como $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, se puede deducir que $1+\frac{3}{ab+bc+ca} \geq 1+\frac{9}{(a+b+c)^2}$. Entonces, la desigualdad será verdadera si

$$1+\frac{9}{(a+b+c)^2} \geq \frac{6}{(a+b+c)}.$$

Pero esta última desigualdad se sigue de que $\left(1-\frac{3}{a+b+c}\right)^2 \geq 0$.

Ahora bien, si $abc=1$, considere $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ y $z=\frac{1}{c}$; se sigue inmediatamente que $xyz=1$. Luego, la desigualdad es equivalente a

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx} \geq \frac{6}{x+y+z}$$

que es la primera parte del ejercicio.

Solución 1.87 Utilice la convexidad de la función $f(x)=x^r$, para $r \geq 1$ (su segunda derivada es $r(r-1)x^{r-2}$). Primero suponga que $r > s > 0$. La desigualdad de Jensen para funciones convexas $f(x)=x^{\frac{r}{s}}$ aplicada a x_1^s, ..., x_n^s dice que

$$w_1x_1^r+\cdots+w_nx_n^r \geq (w_1x_1^s+\cdots+w_nx_n^s)^{\frac{r}{s}}$$

y tomando la $\frac{1}{r}$-ésima potencia de ambos lados de la desigualdad se obtiene la desigualdad deseada.

Ahora, suponga que $0 > r > s$. Entonces $f(x) = x^{\frac{r}{s}}$ es cóncava, es decir, la desigualdad de Jensen es válida en el otro sentido. Sin embargo, si toma la potencia $\frac{1}{r}$-ésima la desigualdad se invierte nuevamente.
Finalmente, en el caso $r > 0 > s$, $f(x) = x^{\frac{r}{s}}$ es nuevamente convexa, y tomando la $\frac{1}{r}$-ésima potencia en ambos lados de la desigualdad, ésta se preserva.

Solución 1.88 (i) Aplique la desigualdad de Hölder a los números $x_1^c, \ldots, x_n^c$, $y_1^c, \ldots, y_n^c$ con $a' = \frac{a}{c}$ and $b' = \frac{b}{c}$.
(ii) Para probar esto siga la demostración del ejemplo 1.5.9. Lo único que tiene que probar además es que $x_i y_i z_i \leq \frac{1}{a}x_i^a + \frac{1}{b}y_i^b + \frac{1}{c}z_i^c$, pero esto se sigue de la parte (i) del mismo ejemplo.

Solución 1.89 Por la simetría de las variable en la desigualdad se puede suponer que $a \leq b \leq c$. Se tienen dos casos, (i) $b \leq \frac{a+b+c}{3}$ y (ii) $b \geq \frac{a+b+c}{3}$.
Caso (i) $b \leq \frac{a+b+c}{3}$.
Se tiene que $\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{a+c}{2} \leq c$, y luego es cierto que $\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{b+c}{2} \leq c$. Entonces, existen λ, $\mu \in [0,1]$ tales que

$$\frac{c+a}{2} = \lambda c + (1-\lambda)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \quad \text{and} \quad \frac{b+c}{2} = \mu c + (1-\mu)\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Sumando estas igualdades, se obtiene que

$$\frac{a+b+2c}{2} = (\lambda+\mu)c + (2-\lambda-\mu)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = (2-\lambda-\mu)\left(\frac{a+b-2c}{3}\right) + 2c.$$

Luego,

$$\frac{a+b-2c}{2} = (2-\lambda-\mu)\left(\frac{a+b-2c}{3}\right).$$

Por lo tanto, $2 - (\lambda+\mu) = \frac{3}{2}$ y $(\lambda+\mu) = \frac{1}{2}$.
Ahora bien, como f es una función convexa, se tiene que

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}(f(a)+f(b)) \\
f\left(\frac{b+c}{2}\right) &\leq \mu f(c) + (1-\mu) f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \\
f\left(\frac{c+a}{2}\right) &\leq \lambda f(c) + (1-\lambda) f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)
\end{aligned}$$

entonces, sumando estas desigualdades se obtiene que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)+f(c)\right) \\ &+\frac{3}{2}f\left(\frac{a+b+c}{3}\right). \end{aligned}$$

Caso (ii) $b \geq \frac{a+b+c}{3}$.
Es análogo al caso (i), utilizando el hecho que $a \leq \frac{a+c}{2} \leq \frac{a+b+c}{3}$ y $a \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

Solución 1.90 Si alguna de las variables a, b o c es cero, la desigualdad es evidente. Aplicando la desigualdad de Popoviciu's, al ejercicio anterior, y utilizando la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \exp(2x)$, que es convexa ya que $f''(x) = 4\exp(2x) > 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \exp(2x)+\exp(2y)+\exp(2z)+3\exp(\frac{2(x+y+z)}{3}) &\geq \\ &\geq 2\left[\exp(x+y)+\exp(y+z)+\exp(z+x)\right] = \\ &= 2\left[\exp(x)\exp(y)+\exp(y)\exp(z)+\exp(z)\exp(x)\right]. \end{aligned}$$

Definiendo $a = \exp(x)$, $b = \exp(y)$, $c = \exp(z)$, se puede reescribir la desigualdad anterior como

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Para la segunda parte aplique la desigualdad $AM - GM$ de la siguiente forma

$$2abc+1 = abc+abc+1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Solución 1.91 Aplicando la desigualdad de Popoviciu a la función convexa $f(x) = x + \frac{1}{x}$ se obtiene la desigualdad, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \geq \frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{4}{a+b}$. Ahora, multiplique ambos lados de la desigualdad por $(a+b+c)$ para terminar la demostración.

Solución 1.92 Observe que por la ecuación (1.8), se obtiene

$$x^2+y^2+z^2-|x||y|-|y||z|-|z||x| = \frac{1}{2}(|x|-|y|)^2+\frac{1}{2}(|y|-|z|)^2+\frac{1}{2}(|z|-|x|)^2$$

lo cual es claramente mayor o igual a cero. Por lo tanto,

$$|xy+yz+zx| \leq |x||y|+|y||z|+|z||x| \leq x^2+y^2+z^2.$$

Segunda Solución. Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz con (x, y, z) y (y, z, x).

Solución 1.93 La desigualdad es equivalente a tener $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$, la cual se sabe que es verdadera. Vea el ejercicio 1.27.

Solución 1.94 Observe que, si $a+b+c=0$, entonces se sigue de la ecuación (1.7) que $a^3+b^3+c^3=3abc$. Como $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$, se obtiene la factorización

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$$

Solución 1.95 Suponga, sin pérdida de generalidad, que $a \geq b \geq c$. Entonces, necesita demostrar que

$$-a^3+b^3+c^3+3abc \geq 0.$$

Como

$$-a^3+b^3+c^3+3abc=(-a)^3+b^3+c^3-3(-a)bc,$$

factorice, la última expresión, como

$$\frac{1}{2}(-a+b+c)((a+b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2).$$

La conclusión se sigue de la desigualdad del triángulo, $b+c>a$.

Solución 1.96 Sea $p=|(x-y)(y-z)(z-x)|$. Utilizando la desigualdad $MG-MA$ del lado derecho de la identidad (1.8), se tiene que

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{p^2}. \qquad (4.1)$$

Ahora bien, como $|x-y| \leq x+y$, $|y-z| \leq y+z$, $|z-x| \leq z+x$, se tiene que

$$2(x+y+z) \geq |x-y|+|y-z|+|z-x|. \qquad (4.2)$$

Aplicando nuevamente la desigualdad $MG-MA$, se obtiene que

$$2(x+y+z) \geq 3\sqrt[3]{p},$$

y el resultado se sigue de las desigualdades (4.1) y (4.2).

Solución 1.97 Utilice la identidad (1.7), factorice, la condición $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$, y se obtiene

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=1. \tag{4.3}$$

Sean $A=x^2+y^2+z^2$ y $B=x+y+z$. Observe que $B^2-A=2(xy+yz+zx)$. Por la identidad (1.8), se tiene que $B>0$. La ecuación 4.3 se transforma en

$$B\left(A-\frac{B^2-A}{2}\right)=1,$$

luego $3A=B^2+\frac{2}{B}$. Como $B>0$, aplique la desigualdad $MG-MA$, para obtener

$$3A=B^2+\frac{2}{B}=B^2+\frac{1}{B}+\frac{1}{B}\geq 3,$$

es decir, $A\geq 1$. El mínimo $A=1$ se alcanza, por ejemplo, con $(x,y,z)=(1,0,0)$.

Solución 1.98 Por la desigualdad (1.11), se tiene que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Solución 1.99 Utilice la desigualdad (1.11) dos veces para obtener

$$a^4+b^4=\frac{a^4}{1}+\frac{b^4}{1}\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{2}\geq\frac{(\frac{(a+b)^2}{2})^2}{2}=\frac{(a+b)^4}{8}.$$

Solución 1.100 Escriba el lado izquierdo como

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{x+y}+\frac{(\sqrt{2})^2}{y+z}+\frac{(\sqrt{2})^2}{z+x}$$

y use la desigualdad (1.11).

Solución 1.101 Escriba el lado izquierdo como

$$\frac{x^2}{axy+bzx}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{azx+byz}$$

y ahora aplicando la desigualdad (1.11), se tiene

$$\frac{x^2}{axy+bzx}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{azx+byz}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+zx+yz)}\geq\frac{3}{a+b},$$

donde la última desigualdad se sigue de la ecuación (1.8).

Solución 1.102 Escriba el lado izquierdo como

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a},$$

luego use la desigualdad (1.11).

Solución 1.103 (i) Escriba el lado izquierdo como

$$\frac{x^2}{x^2+2xy+3zx}+\frac{y^2}{y^2+2yz+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2zx+3yz}$$

y use la desigualdad (1.11) para obtener

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+zx+yz)}.$$

Ahora, sólo falta probar la desigualdad

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+zx+yz)}\geq\frac{1}{2},$$

pero ésta es equivalente a $x^2+y^2+z^2\geq xy+zx+yz$.

(ii) Como en la parte (i), escriba el lado izquierdo como

$$\frac{w^2}{xw+2yw+3zw}+\frac{x^2}{xy+2xz+3xw}+\frac{y^2}{yz+2yw+3xy}+\frac{z^2}{zw+2xz+3yz}$$

entonces, use la desigualdad (1.11) para obtener

$$\frac{w}{x+2y+3z}+\frac{x}{y+2z+3w}+\frac{y}{z+2w+3x}+\frac{z}{w+2x+3y}\geq$$
$$\geq\frac{(w+x+y+z)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)}.$$

Luego, la desigualdad que tiene que probar es

$$\frac{(w+x+y+z)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)}\geq\frac{2}{3},$$

que es equivalente a $3(w^2+x^2+y^2+z^2)\geq 2(wx+xy+yz+zw+wy+xz)$. Pero ésta se deduce de la desigualdad $MG-MA$ aplicada seis veces en la forma $x^2+y^2\geq 2xy$.

Solución 1.104 Use la desigualdad (1.11) para obtener

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}.$$

También, la desigualdad

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{4}$$

es equivalente a

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx.$$

Solución 1.105 Escriba el lado izquierdo como

$$\frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+d)} + \frac{c^2}{c(d+a)} + \frac{d^2}{d(a+b)}$$

y use la desigualdad (1.11) para obtener

$$\frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+d)} + \frac{c^2}{c(d+a)} + \frac{d^2}{d(a+b)} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+2c+d)+b(c+d)+d(b+c)}$$

Observe, por otro lado, que

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{(ac+bd)+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}{(ac+bd)+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Demostrar que la última expresión es mayor que 2, es equivalente a demostrar que $a^2+c^2 \geq 2ac$ y $b^2+d^2 \geq 2bd$, las cuales son inmediatas por la desigualdad $MG - MA$.

Solución 1.106 Escriba el lado izquierdo como

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+bd} + \frac{c^2}{cd+ce} + \frac{d^2}{de+ad} + \frac{e^2}{ae+be}$$

y use la desigualdad (1.11) para obtener

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+bd} + \frac{c^2}{cd+ce} + \frac{d^2}{de+ad} + \frac{e^2}{ae+be} \geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{\sum ab}.$$

Como
$$(a+b+c+d+e)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab,$$
muestre que
$$2\sum a^2 + 4\sum ab \geq 5\sum ab,$$
lo cual es equivalente a
$$2\sum a^2 \geq \sum ab.$$
La última desigualdad se sigue de $\sum a^2 \geq \sum ab$.

Solución 1.107 (i) Use la desigualdad de Tchebyshev con los números $(a \geq b \geq c)$ y $(\frac{a^2}{x} \geq \frac{b^2}{y} \geq \frac{c^2}{z})$ para tener que
$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}\right) \geq \frac{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3},$$
entonces, por la desigualdad (1.11), se tiene que
$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$
Por lo tanto,
$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \cdot \frac{a+b+c}{3}.$$
(ii) Por el ejercicio 1.88, se tiene que
$$\left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}\right)^{\frac{1}{3}} (1+1+1)^{\frac{1}{3}} (x+y+z)^{\frac{1}{3}} \geq a+b+c.$$
Elevando al cubo ambos lados de la desigualdad y dividiendo ambos lados por $3(x+y+z)$ se obtiene el resultado.

Solución 1.108 Use la desigualdad útil (1.11) y obtendrá que
$$\begin{aligned}\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + \cdots + x_n} &= \frac{x_1^2}{x_1 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_1 + \cdots + x_n} \\ &\geq \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{n(x_1 + \cdots + x_n)} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.\end{aligned}$$
Luego, es suficiente probar que
$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq x_1 \cdots x_n.$$

Como $k = \text{máx}\,\{x_1, \ldots, x_n\} \geq \text{min}\,\{x_1, \ldots, x_n\} = t$, se tiene que $\frac{kn}{t} \geq n$ y como $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq 1$, ya que todos los x_i son enteros positivos, es suficiente probar que

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 \cdots x_n,$$

que es equivalente a la desigualdad $MG - MA$.
Como todas las desigualdades intermedias que se han usado son desigualdades válidas cuando $x_1 = \cdots = x_n$ se concluye que esto sucede en este caso.

Solución 1.109 Con la sustitución $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ y $c = \frac{z}{x}$, se puede reescribir la desigualdad como,

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1,$$

con la condición extra que, $abc = 1$.
Para probar esta última desigualdad se puede usar la condición extra como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} &= \frac{a^3}{a^3+2abc} + \frac{b^3}{b^3+2abc} + \frac{c^3}{c^3+2abc} \\
&= \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \\
&\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab} = 1.
\end{aligned}$$

Y la desigualdad anterior se deduce de la desigualdad (1.11).

Solución 1.110 Con la sustitución $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$, la desigualdad toma la forma

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Y esta última desigualdad es la desigualdad de Nesbitt, ejemplo 1.4.8.

Solución 1.111 Use la sustitución $x_1 = \frac{a_2}{a_1}$, $x_2 = \frac{a_3}{a_2}$, ..., $x_n = \frac{a_1}{a_n}$. Como $\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} = \frac{1}{1+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}} = \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$ y análogamente para los otros sumandos del lado izquierdo de la desigualdad. Por lo que se tiene que la desigualdad es ahora equivalente a

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_2+a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_n+a_1+a_2} > 1.$$

Pero esta desigualdad es ahora evidente. Únicamente observe que para toda $i = 1, ..., n$ se cumple que

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} < a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Solución 1.112 Con la sustitución $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ y $z = \frac{1}{c}$, la condición $ab + bc + ca = abc$, se transforma en $x + y + z = 1$ y la desigualdad original es equivalente a

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq 1 = x + y + z.$$

Por la desigualdad de Tchebyshev, se garantiza que

$$\frac{x^4 + y^4}{2} \geq \frac{x^3 + y^3}{2} \frac{x + y}{2},$$

por lo que,

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geq \frac{x + y}{2} + \frac{y + z}{2} + \frac{z + x}{2}.$$

Solución 1.113 La desigualdad de la izquierda se sigue de aplicar la desigualdad (1.11). Para la desigualdad de la derecha, la sustitución, $x = \frac{bc}{a}$, $y = \frac{ca}{b}$, $z = \frac{ab}{c}$ nos permite reescribir la desigualdad como

$$\sqrt{\frac{yz + zx + xy}{3}} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Elevando al cuadrado ambos lados y se obtiene que $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2$, la cual es válida si y sólo si $(xy + yz + zx) \leq x^2 + y^2 + z^2$, pero esta desigualdad es ya conocida.

Solución 1.114 Note que

$$\begin{aligned} \frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 - 3\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}. \end{aligned}$$

Utilizando la sustitución, $a = \frac{2x}{y}$, $b = \frac{2y}{z}$, $c = \frac{2z}{x}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} &= \frac{1}{\frac{2x}{y}+1} + \frac{1}{\frac{2y}{z}+1} + \frac{1}{\frac{2z}{x}+1} \\
&= \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \\
&= \frac{y^2}{2xy+y^2} + \frac{z^2}{2yz+z^2} + \frac{x^2}{2zx+x^2} \\
&\geq \frac{(x+y+z)^2}{2xy+y^2+2yz+z^2+2zx+x^2} = 1.
\end{aligned}$$

Para la única desigualdad que aparece en este cálculo, se aplicó la desigualdad (1.11).

Solución 1.115 Observe que

$$[5,0,0] = \frac{2}{6}(a^5+b^5+c^5) \geq \frac{2}{6}(a^3bc+b^3ca+c^3ab) = [3,1,1],$$

donde se usó el teorema de Muirhead.

Solución 1.116 Utilizando la fórmula de Herón para el área de un triángulo, podemos reescribir la desigualdad como sigue

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}\frac{(a+c-b)}{2}\frac{(b+c-a)}{2}}.$$

Pero, ésta es equivalente a

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2+c^2)^2 &\geq 3[((a+b)^2-c^2)(c^2-(b-a)^2)] \\
&= 3(2c^2a^2+2c^2b^2+2a^2b^2-(a^4+b^4+c^4)),
\end{aligned}$$

es decir, $a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, que en términos del teorema de Muirhead es equivalente a probar que $[4,0,0] \geq [2,2,0]$.

Segunda Solución. Utilizando la sustitución

$$x = a+b-c, \;\; y = a-b+c, \;\; z = -a+b+c,$$

obtenemos que $x+y+z = a+b+c$; entonces, utilizando la fórmula de Herón, tenemos

$$4(ABC) = \sqrt{(a+b+c)(xyz)} \leq \sqrt{(a+b+c)\frac{(x+y+z)^3}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}.$$

Ahora, sólo se tiene que probar que $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$. Aplicando, el teorema de Muirhead, se deduce esta desigualdad, ya que $[1,1,0] \leq [2,0,0]$.

Solución 1.117 Note que,

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{9}{4(a+b+c)} \\
\iff\quad & 8(ab+bc+ca)(a+b+c) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a) \\
\iff\quad & 24abc + 8\sum(a^2b+ab^2) \leq 9\sum(a^2b+ab^2) + 18abc \\
\iff\quad & 6abc \leq a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \\
\iff\quad & [1,1,1] \leq [2,1,0]
\end{aligned}$$

Solución 1.118 La desigualdad es equivalente a

$$a^3+b^3+c^3 \geq ab(a+b-c)+bc(b+c-a)+ca(c+a-b).$$

Defina $x=a+b-c$, $y=b+c-a$, $z=a+c-b$, para obtener $a=\frac{x+z}{2}$, $b=\frac{x+y}{2}$, $c=\frac{y+z}{2}$. Entonces, la desigualdad que se tiene que probar es

$$\frac{1}{8}((x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3) \geq \frac{1}{4}((x+y)(x+z)x+(x+y)(y+z)y+(x+z)(y+z)z),$$

que es equivalente a

$$3(x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z) \geq 2(x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z)+6xyz$$

o

$$x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z \geq 6xyz$$

y aplicando el teorema de Muirhead se obtiene el resultado cuando x, y, z son no-negativos. Si uno de ellos es negativo (y no puede ser más de uno al mismo tiempo), se tiene que

$$x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y) = x^2 2c + y^2 2a + z^2 2b \geq 0$$

pero $6xyz$ es negativo, lo cual concluye la prueba.

Solución 1.119 Observe que

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c$$

que es equivalente a la desigualdad

$$\frac{a^3(b+c)}{b^3+c^3}+\frac{b^3(c+a)}{c^3+a^3}+\frac{c^3(a+b)}{a^3+b^3}\geq a+b+c,$$

que a su vez es equivalente a

$$a^3(b+c)(a^3+c^3)(a^3+b^3)+b^3(c+a)(b^3+c^3)(a^3+b^3)+c^3(a+b)(a^3+c^3)(b^3+c^3)\geq$$
$$(a+b+c)(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3).$$

Se puede reescribir esta última desigualdad en términos del teorema de Muirhead como

$$\begin{aligned}
[9,1,0]+[6,4,0]+[6,3,1]+[4,3,3] &\geq \left(\frac{1}{2}[1,0,0]\right)\left([6,3,0]+\frac{1}{3}[3,3,3]\right)\\
&= [7,3,0]+[6,4,0]+[6,3,1]+[4,3,3]\\
&\Leftrightarrow [9,1,0]\geq[7,3,0]
\end{aligned}$$

lo cual es evidente utilizando Muirhead.

Solución 1.120 Suponga que $a\leq b\leq c$, luego

$$\frac{1}{(1+b)(1+c)}\leq\frac{1}{(1+c)(1+a)}\leq\frac{1}{(1+a)(1+b)}.$$

Use Tchebyshev para ver que

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\\
&\geq\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{(1+b)(1+c)}+\frac{1}{(1+a)(1+c)}+\frac{1}{(1+a)(1+b)}\right)=\\
&=\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\frac{3+(a+b+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, use que $\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\geq(\frac{a+b+c}{3})^3$, $\frac{a+b+c}{3}\geq 1$ y $(1+a)(1+b)(1+c)\leq\left(\frac{3+a+b+c}{3}\right)^3$ para ver que

$$\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\frac{3+(a+b+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\frac{6}{(1+\frac{a+b+c}{3})^3}\geq\frac{6}{8}.$$

Para la última desigualdad, observe que $\dfrac{\frac{a+b+c}{3}}{1+\frac{a+b+c}{3}}\geq\frac{1}{2}$.

Segunda Solución. Multiplicando por el denominador común y desarrollando ambos lados, la desigualdad deseada es equivalente a

$$a(a^4+b^4+c^4+a^3+b^3+c^3) \geq 3(1+a+b+c+ab+bc+ca+abc).$$

Como $4(a^4+b^4+c^4+a^3+b^3+c^3) = 4(3[4,0,0]+3[3,0,0])$ y $3(1+a+b+c+ab+bc+ca+abc) = 3([0,0,0]+3[1,0,0]+3[1,1,0]+[1,1,1])$, la desigualdad es equivalente a

$$4[4,0,0]+4[3,0,0] \geq [0,0,0]+3[1,0,0]+3[1,1,0]+[1,1,1].$$

Ahora, observemos que

$$[4,0,0] \geq \left[\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right] = a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}} = 1 = [0,0,0],$$

donde tenemos que $abc = 1$. También

$$3[4,0,0] \geq 3[2,1,1] = 3\frac{1}{3}(a^2bc+b^2ca+c^2ab) = 3\frac{1}{3}(a+b+c) = 3[1,0,0]$$

y

$$\begin{aligned} 3[3,0,0] \geq 3\left[\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right] &= 3\frac{1}{3}(a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{4}{3}}a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}} \\ &= 3\frac{1}{3}(ab+bc+ca) = 3[1,0,0]. \end{aligned}$$

Finalmente, $[3,0,0] \geq [1,1,1]$. Sumando estas desigualdades, obtenemos la desigualdad deseada.

4.2. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2

Solución 2.1 (i) Trace un segmento BC de longitud a, con centro en B un círculo de radio c y con centro en C un círculo de radio b, ¿Bajo qué circunstancias se intersectan?
(ii) Se sigue de (i).
(iii) $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x \Leftrightarrow x = \frac{a+c-b}{2}$, $y = \frac{a+b-c}{2}$, $z = \frac{b+c-a}{2}$.

Solución 2.2 (i) $c < a+b \Rightarrow c < a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \Rightarrow \sqrt{c} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
(ii) Con 2, 3 y 4 se puede construir un triángulo y con 4, 9 y 16 no es posible construirlo.

(iii) $a < b < c \Rightarrow a + b < a + c < b + c \Rightarrow \frac{1}{b+c} < \frac{1}{c+a} < \frac{1}{a+b}$, por lo que será suficiente que ver que $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$, pero es más fácil ver que $\frac{1}{c} < \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.

Solución 2.3 Utilice el hecho de que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo, el ángulo que se opone al lado de longitud c es o bien recto, agudo u obtuso dependiendo si c^2 es igual, menor o mayor a $a^2 + b^2$, respectivamente. Suponga entonces que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$, y que las ternas de segmentos de longitud (a, b, c) y (c, d, e) no forman un triángulo acutángulo. Luego, como $c^2 \geq a^2 + b^2$ y $e^2 \geq c^2 + d^2$, se puede concluir que $e^2 \geq a^2 + b^2 + d^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (a + b)^2$, por lo cual $a + b \leq e$, lo que nos lleva a una contradicción.

Solución 2.4 Como $\angle A > \angle B$ entonces $BC > CA$. Utilizando la desigualdad del triángulo $AB < BC + CA$ y la afirmación anterior se tiene que $AB < 2BC$.

Solución 2.5 (i) Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Aplique la desigualdad del triángulo a los triángulos ABO y CDO. Sumando las desigualdades, tenemos $AB + CD < AC + BD$. Por otro lado, por hipótesis se tiene que $AB + BD < AC + CD$. Sumando estas dos últimas desigualdades obtiene que $AB < AC$.
(ii) Sea DE paralela a BC; entonces $\angle EDA < \angle BCD < \angle A$, luego $DE > \frac{1}{2}AD$. Por lo tanto, $\frac{1}{2}AD < DE < BC$, vea el ejercicio anterior.

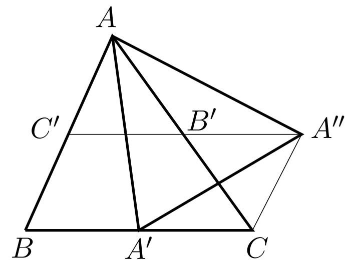
Solución 2.6 Cada d_i es menor que la suma de la longitud de dos lados. Use también el hecho que, en un cuadrilátero convexo la suma de la longitud de dos lados opuestos es menor que la suma de la longitud de las diagonales.

Solución 2.7 Aplique la desigualdad del triángulo a los triángulos ABA' y $AA'C$ para mostrar que $c < m_a + \frac{1}{2}a$ y $b < m_a + \frac{1}{2}a$.

Solución 2.8 Si α, β, γ son los ángulos del triángulo en A, B y C, respectivamente, y si $\alpha_1 = \angle BAA'$ y $\alpha_2 = \angle A'AC$ entonces, por D2, $\beta > \alpha_1$ y $\gamma > \alpha_2$. Luego, $180^o = \alpha + \beta + \gamma > \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha = 2\alpha$. O bien, si trazamos un círculo de diámetro BC, A deberá estar fuera del círculo y entonces $\angle BAC < 90°$.

Solución 2.9 Construya un paralelogramo $ABDC$, con una diagonal BC y otra AD la cual es igual al doble de AA' y use la desigualdad D2, en el triángulo ABD.

Solución 2.10 Complete un paralelogramo como en la solución anterior para mostrar que $m_a < \frac{b+c}{2}$. Análogamente, $m_b < \frac{c+a}{2}$ y $m_c < \frac{a+b}{2}$. Para probar la desigualdad de la izquierda, sean A', B', C' los puntos medios de los lados BC, CA y AB, respectivamente.



Prolongue el segmento $C'B'$ hasta un punto A'' de manera que $C'A'' = BC$. Aplique el resultado anterior al triángulo $AA'A''$ cuyos lados tienen longitud m_a, m_b y m_c.

Solución 2.11 Considere el cuadrilátero $ABCD$ y sea O un punto en el exterior del cuadrilátero tal que AOB sea semejante a ACD, entonces también OAC y BAD son semejantes. Si O, B y C son colineales se tiene la igualdad, si no son colineales se tiene una desigualdad[2].

Solución 2.12 Sean $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $m = AC$ y $n = BD$. Sea R el radio del circuncírculo de $ABCD$. Se tiene que[3]

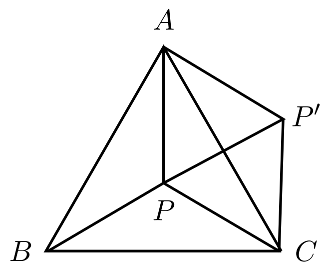
$$\begin{aligned}
(ABCD) &= (ABC) + (CDA) = \frac{m(ab+cd)}{4R}, \\
(ABCD) &= (BCD) + (DAB) = \frac{n(bc+ad)}{4R},
\end{aligned}$$

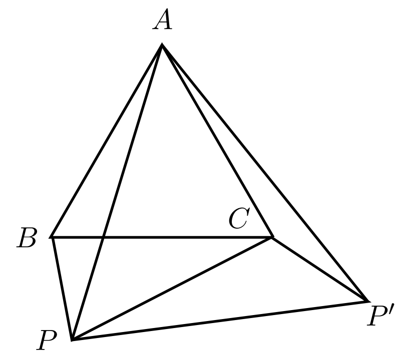
donde $(ABCD)$ denota el área del cuadrilátero $ABCD$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} = \frac{bc+ad}{ab+cd} > 1 \qquad &\Leftrightarrow \qquad bc + ad > ab + cd \\
&\Leftrightarrow \qquad (d-b)(a-c) > 0.
\end{aligned}$$

Solución 2.13 Con centro en A haga una rotación de $60°$ del triángulo ABP. El punto B se transforma en C y sea P' el transformado de P. El triángulo $PP'C$ tiene lados $PP' = PA$, $P'C = PB$ y PC, como el que se desea.

[2]Ver [6], pág. 136 o [1], pág. 128.
[3]Ver [6], pág. 97 o [9], pág. 13.





Segunda Solución. Use la desigualdad de Ptolomeo (ejercicio 2.11) en los cuadriláteros $ABCP$, $ABPC$ y $APBC$; después de cancelar factores comunes tendrá que: $PB < PC + PA$, $PA < PC + PB$ y $PC < PA + PB$, respectivamente. Esto garantiza la existencia del triángulo.

Tercera Solución. Otra solución para el caso en que P este dentro de ABC. Sea P' el punto donde AP corta al lado BC. Use ahora que, $AP < AP' < AB = BC < PB + PC$. Análogamente obtenga las desigualdades $PB < PC + PA$ y $PC < PA + PB$.

Solución 2.14 Sean $a = AB$, $b = BC$, $x = AC$, $y = BD$. Recuerde que en un paralelogramo se cumple la identidad $2(a^2 + b^2) = x^2 + y^2$. Suponga además, sin perder generalidad, que $a \leq b$. Es claro que $2b < (x + y)$, por lo que $(2b)^2 < (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2(a^2 + b^2) + 2xy$. Luego, reduciendo se obtiene que $2(b^2 - a^2) < 2xy$.

Solución 2.15 (i) Prolongue las medianas AA', BB' y CC' hasta que corten al circuncírculo en A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Use la potencia de A' para establecer que $A'A_1 = \frac{a^2}{4m_a}$. También, use el hecho de que $m_a + A'A_1 \leq 2R$ y que la longitud de la mediana satisface $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, es decir, $4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$. Hay expresiones análogas para m_b y m_c.
(ii) Use la desigualdad de Ptolomeo en los cuadriláteros $AC'GB'$, $BA'GC'$ y $CB'GA'$, donde G denota el centroide. Por ejemplo, para el primer cuadrilátero se obtiene que $\frac{2}{3}m_a\frac{a}{2} \leq \frac{b}{2}\frac{m_c}{3} + \frac{c}{2}\frac{m_b}{3}$, entonces $2m_a a^2 \leq ab\, m_c + ac\, m_b$.

Solución 2.16 Use la fórmula $4m_b^2 + b^2 = 2(c^2 + a^2)$, para ver que $m_b^2 - m_c^2 = \frac{3}{4}(c^2 - b^2)$. Ahora bien, usando la desigualdad del triángulo pruebe que $m_b + m_c < \frac{3}{2}(b + c)$. De aquí puede deducir la desigualdad de la izquierda.

La desigualdad de la derecha se puede deducir de la primera cuando se aplica al triángulo de lados[4] de longitud m_a, m_b y m_c.

Solución 2.17 Sean a, b y c la longitud de los lados del triángulo ABC. Si E y F son las proyecciones de I_a sobre las rectas AB y CA, respectivamente, es claro que, si r_a es el radio del excírculo, se tiene que $r_a = I_aE = EA = AF = FI_a = s$, donde s es el semiperímetro de ABC. Además, si h_a es la altura del triángulo ABC desde A, entonces $\frac{AD}{DI_a} = \frac{h_a}{r_a}$. Como $ah_a = bc$, se tiene que

$$\frac{AD}{DI_a} = \frac{h_a}{r_a} = \frac{bc}{as} = \left(\frac{abc}{4R}\right)\left(\frac{4Rr}{a^2}\right)\left(\frac{1}{rs}\right) = \frac{4Rr}{a^2},$$

donde r y R son el inradio y circunradio de ABC, respectivamente.
Como $2R = a$ y $2r = b+c-a$, entonces $\frac{AD}{DI_a} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{b+c}{a} - 1$. Bastará que vea que $\frac{b+c}{a} \leq \sqrt{2}$ o, equivalentemente, que $2bc \leq a^2$, pero $bc = \sqrt{b^2c^2} \leq \frac{b^2+c^2}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Solución 2.18 Simplificando y utilizando el ejercicio 1.27, la primera desigualdad es equivalente a $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$. Para la segunda desarrolle $(a+b+c)^2$ y utilizando la desigualdad del triángulo se obtiene que $a^2 < a(b+c)$.

Solución 2.19 Utilice la sugerencia anterior.

Solución 2.20 Si desarrolla la expresión regresará al ejercicio anterior.

Solución 2.21 La primera desigualdad es la desigualdad de Nesbitt, ejemplo 1.4.8. Para la segunda desigualdad use el hecho de que $a+b > \frac{a+b+c}{2}$, entonces $\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$.

Solución 2.22 Observe que $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) - 2abc = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$; ahora vea el ejemplo 2.2.3.

Solución 2.23 Observe que

$$\begin{aligned} a\left(b^2+c^2-a^2\right) &+ b\left(c^2+a^2-b^2\right) + c\left(a^2+b^2-c^2\right) = \\ &a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c), \end{aligned}$$

vea ahora el ejercicio 2.22.

[4] Ver la solución del ejercicio 2.10.

Solución 2.24 Use la transformación de Ravi con $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ para ver primero que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) = 2(xy^3+yz^3+zx^3)-2(xy^2z+x^2yz+xyz^2).$$

Luego, la desigualdad es equivalente a $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$. Ahora, use la desigualdad (1.11).

Solución 2.25

$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| &= \left|\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{c-a}{c+a}\right| \\ &< \frac{cab}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{8},\end{aligned}$$

para la última desigualdad, vea la solución del ejemplo 2.2.3.

Solución 2.26 Por el ejercicio 2.18

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca).$$

Entonces, como $ab+bc+ca = 3$, se sigue que $9 \leq (a+b+c)^2 \leq 12$, de donde se tiene el resultado.

Solución 2.27 Use la transformación de Ravi, $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$. Por la desigualdad $MG - MA$, y la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} + \frac{1}{\sqrt{xy}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}} \\ &\leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{x+y+z}}{2\sqrt{xyz}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} = \frac{\sqrt{3}}{2r}.\end{aligned}$$

Para la última identidad vea el final de la demostración del ejemplo 2.2.4.

Solución 2.28 (i) Se sigue de las equivalencias siguientes,

$$\begin{aligned}(s-a)(s-b)<ab &\Leftrightarrow s^2-s(a+b)<0\\ &\Leftrightarrow a+b+c<2(a+b)\\ &\Leftrightarrow c<a+b.\end{aligned}$$

(ii) Use la transformación de Ravi, $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, para ver que la desigualdad es equivalente a,

$$4(xy+yz+zx)\leq(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)+(x+y)(y+z),$$

y para justificar la última desigualdad basta ver que, $xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2$, que se sabe del ejercicio 1.27.
Otra manera de obtener (ii).
La desigualdad es equivalente a,

$$3s^2-2s(a+b+c)+(ab+bc+ca)\leq\frac{ab+bc+ca}{4}.$$

Y ésta a su vez es equivalente a $3(ab+bc+ca)\leq 4s^2$, que se reescribe como $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$, la cual se sigue también del ejercicio 1.27.

Solución 2.29 La ley de los cosenos ayuda a ver que

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2} &= \sqrt{2ab\cos C}\sqrt{2ac\cos B}\\ &= 2a\sqrt{(b\cos C)(c\cos B)}\\ &\leq 2a\frac{b\cos C+c\cos B}{2}=a^2.\end{aligned}$$

Solución 2.30 Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para cualesquiera x, y, z, $w\geq 0$, se tiene que

$$\sqrt{xy}+\sqrt{zw}\leq\sqrt{(x+z)(y+w)}.$$

De donde,

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cíclica}}\sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2} &= \frac{1}{2}\sum_{\text{cíclica}}\Big(\sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2}\\ &\quad+\sqrt{c^2+a^2-b^2}\sqrt{c^2-a^2+b^2}\Big)\\ &\leq\frac{1}{2}\sum_{\text{cíclica}}\sqrt{(2a^2)(2c^2)}=\sum_{\text{cíclica}}ac.\end{aligned}$$

Solución 2.31 Considere números positivos x, y, z, con $a = y + z$, $b = z + x$ y $c = x + y$. Las desigualdades son equivalentes a demostrar que

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3 \quad \text{y} \quad \frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{z+x} + \frac{2z}{x+y} \geq 3.$$

Para la primera desigualdad use que $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$ y para la segunda use la desigualdad de Nesbitt.

Solución 2.32 Como en los triángulos con la misma base la razón de sus alturas es igual a la razón de sus áreas, se tiene que,

$$\frac{PQ}{AD} + \frac{PR}{BE} + \frac{PS}{CF} = \frac{(PBC)}{(ABC)} + \frac{(PCA)}{(ABC)} + \frac{(PAB)}{(ABC)} = \frac{(ABC)}{(ABC)} = 1.$$

Utilice la desigualdad (2.3) de la sección 2.3.

Solución 2.33 (i) Recuerde que $(S_1 + S_2 + S_3)(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}) \geq 9$.

(ii) Los vértices de los triángulos forman un hexágono que se divide en 6 triángulos de áreas S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3, donde los triángulos de áreas S_i y T_i tienen un ángulo común. Utilice la fórmula de área que involucra al seno del ángulo para demostrar que $S_1S_2S_3 = T_1T_2T_3$. Use después la desigualdad $MG - MA$, como sigue

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) &\geq (S_1 + S_2 + S_3 + T_1 + T_2 + T_3)\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) \\ &\geq \frac{18\sqrt[6]{S_1S_2S_3T_1T_2T_3}}{\sqrt[3]{S_1S_2S_3}} = 18. \end{aligned}$$

La igualdad se da cuando el punto O es el centroide del triángulo y las líneas que pasan por O son las medianas del triángulo, es decir, en el caso en que $S_1 = S_2 = S_3 = T_1 = T_2 = T_3 = \frac{1}{6}S$.

Solución 2.34 Si $P = G$ es el centroide, la igualdad es clara, ya que $\frac{AG}{GL} = \frac{BG}{GM} = \frac{CG}{GN} = 2$.

Por otro lado, si $\frac{AP}{PL} + \frac{BP}{PM} + \frac{CP}{PN} = 6$, se tiene que $\frac{AL}{PL} + \frac{BM}{PM} + \frac{CN}{PN} = 9$. No es difícil ver que $\frac{PL}{AL} = \frac{(PBC)}{(ABC)}$, $\frac{PM}{BM} = \frac{(PCA)}{(ABC)}$ y $\frac{PN}{CN} = \frac{(PAB)}{(ABC)}$, por lo que $\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN} = 1$. Lo que lleva a que

$$\left(\frac{AL}{PL} + \frac{BM}{PM} + \frac{CN}{PN}\right)\left(\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}\right) = 9.$$

Por la desigualdad (2.3), se sabe que esta igualdad ocurre solamente cuando $\frac{AL}{PL} = \frac{BM}{PM} = \frac{CN}{PN} = 3$, lo que garantiza que P sea el centroide.

Solución 2.35 (i) Como $HD = DD'$, $HE = EE'$ y $HF = FF'$, donde H es el ortocentro[5]. Luego, la solución se sigue de la parte (i) del ejemplo 2.3.4.

(ii) Como $\frac{AD'}{AD} = \frac{AD+DD'}{AD} = 1 + \frac{HD}{AD}$, se tiene también, al ver la solución del ejemplo 2.3.4, que $\frac{AD'}{AD} + \frac{BE'}{BE} + \frac{CF'}{CF} = 1 + \frac{HD}{AD} + 1 + \frac{HE}{BE} + 1 + \frac{HF}{CF} = 4$. Como $\left(\frac{AD}{AD'} + \frac{BE}{BE'} + \frac{CF}{CF'}\right)\left(\frac{AD'}{AD} + \frac{BE'}{BE} + \frac{CF'}{CF}\right) \geq 9$ se sigue el resultado.

Solución 2.36 Como se señaló en el ejemplo 2.3.5, la longitud de la bisectriz interna del ángulo A cumple

$$l_a^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) = \frac{4bc}{(b+c)^2}(s(s-a)).$$

Como $4bc \leq (b+c)^2$, se tiene que $l_a^2 \leq s(s-a)$, y $l_a l_b \leq s\sqrt{(s-a)(s-b)} \leq s\frac{(s-a)+(s-b)}{2} = s\frac{c}{2}$. Por lo tanto, $l_a l_b l_c \leq s\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s(sr)$, $l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a \leq s\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = s^2$, y $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq s(s-a) + s(s-b) + s(s-c) = s^2$.

Solución 2.37 Sean $\alpha = \angle AMB$, $\beta = \angle BNA$, $\gamma = \angle APC$, y sea (ABC) el área. Se tiene que

$$(ABC) = \frac{1}{2}a \cdot AM \operatorname{sen}\alpha = \frac{abc}{4R}.$$

De donde, $\frac{bc}{AM} = 2R\operatorname{sen}\alpha$. Análogamente, $\frac{ca}{BN} = 2R\operatorname{sen}\beta$ y $\frac{ab}{CP} = 2R\operatorname{sen}\gamma$. Luego,

$$\frac{bc}{AM} + \frac{ca}{BN} + \frac{ab}{CP} = 2R(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma) \leq 6R.$$

La igualdad se alcanza si M, N y P son los pies de las alturas.

Solución 2.38 Sean A_1, B_1, C_1 los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente, y sean B_2, C_2 las reflecciones de A_1 con respecto a AB y CA, respectivamente. También considere a D la intersección de AB con A_1B_2 y E la intersección de CA con A_1C_2. Entonces,

$$2DE = B_2C_2 \leq C_2B_1 + B_1C_1 + C_1B_2 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = s.$$

Use que A_1DAE es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de diámetro AA_1 y use la ley de senos en ADE, para deducir que $DE = AA_1 \operatorname{sen} A =$

[5] Consultar [6], pág. 85 o [9], pág. 37.

$m_a \operatorname{sen} A$. Entonces, $s \geq 2DE = 2m_a \operatorname{sen} A = 2m_a \frac{a}{2R} = \frac{am_a}{R}$, es decir, $am_a \leq sR$. Análogamente, puede verificar que $bm_b \leq sR$ y $cm_c \leq sR$.

Solución 2.39 La desigualdad es equivalente a $8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc$, donde s es el semiperímetro.
Como $(ABC) = sr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde R y r denotan el circunradio y el inradio, respectivamente, se tiene que demostrar solamente que $8sr^2 \leq abc$. Es decir, que $8sr^2 \leq 4Rrs$, que es equivalente a $2r \leq R$.

Solución 2.40 El área del triángulo ABC, satisface que $(ABC) = \frac{abc}{4R} = \frac{(a+b+c)r}{2}$, luego, $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr} \geq \frac{1}{R^2}$, donde R y r denotan el circunradio y el inradio, respectivamente.

Solución 2.41 Use el ejercicio 2.40 y la ley de los senos.

Solución 2.42 Use que[6] $\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, donde s es el semiperímetro. Expresiones semejantes para $\operatorname{sen} \frac{B}{2}$ y $\operatorname{sen} \frac{C}{2}$, para ver que

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{sr^2}{abc} = \frac{r}{4R} \leq \frac{1}{8},$$

donde R y r denotan el circunradio y el inradio, respectivamente.

Solución 2.43 Sabe por la desigualdad (2.3), que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Como $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$, se tiene que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}. \tag{4.4}$$

Usando nuevamente la desigualdad (2.3), se obtiene

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2A} + \frac{\pi}{2B} + \frac{\pi}{2C}\right) \geq \frac{3}{\frac{2}{\pi}(A+B+C)} = \frac{3}{2}. \tag{4.5}$$

Sea $f(x) = \log \frac{\pi}{2x}$, como $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, f es convexa. Usando la desigualdad de Jensen,

$$\frac{1}{3}\left(\log \frac{\pi}{2A} + \log \frac{\pi}{2B} + \log \frac{\pi}{2C}\right) \geq \log \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2A} + \frac{\pi}{2B} + \frac{\pi}{2C}\right)\right].$$

[6] $\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$.

Usando (4.5) y el hecho que $\log x$ es estrictamente creciente, se tiene que

$$\frac{1}{3}\left(\log\frac{\pi}{2A}+\log\frac{\pi}{2B}+\log\frac{\pi}{2C}\right)\geq\log\frac{3}{2}. \tag{4.6}$$

Suponga que $a\leq b\leq c$, lo cual implica $A\leq B\leq C$. Entonces $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{c}$ y $\log\frac{\pi}{2A}\geq\log\frac{\pi}{2B}\geq\log\frac{\pi}{2C}$. Usando la desigualdad de Tchebyshev,

$$\frac{1}{a}\log\frac{\pi}{2A}+\frac{1}{b}\log\frac{\pi}{2B}+\frac{1}{c}\log\frac{\pi}{2C}\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{\log\frac{\pi}{2A}+\log\frac{\pi}{2B}+\log\frac{\pi}{2C}}{3}\right).$$

Entonces, por (4.4) y (4.6), se tiene

$$\frac{1}{a}\log\frac{\pi}{2A}+\frac{1}{b}\log\frac{\pi}{2B}+\frac{1}{c}\log\frac{\pi}{2C}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}\log\frac{3}{2}.$$

Elevando a las potencias adecuadas y tomando recíprocos, obtiene la desigualdad deseada. En todas las desigualdades anteriores, la igualdad se tiene si y sólo si $a=b=c$ (esto es, la igualdad se tiene sólo para triángulos equiláteros).

Solución 2.44 Por la ley de los senos, se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen}A}{a}=\frac{\operatorname{sen}B}{b}=\frac{\operatorname{sen}C}{c}=\frac{1}{2R},$$

donde a, b, c son las longitudes de los lados del triángulo y R es el circunradio. Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2A+\operatorname{sen}^2B+\operatorname{sen}^2C &= \frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}\\ &= \frac{1}{4R^2}(a^2+b^2+c^2)\\ &\leq \frac{1}{4R^2}\cdot 9R^2=\frac{9}{4},\end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de la desigualdad de Leibniz.

Solución 2.45 Use la desigualdad de Leibniz y el hecho de que el área de un triángulo está dada por $(ABC)=\frac{abc}{4R}$.

Solución 2.46 Note que el incírculo de ABC es el circuncírculo de DEF. Aplicando la desigualdad de Leibniz a DEF, se obtiene

$$EF^2+FD^2+DE^2\leq 9r^2,$$

donde r es el inradio de ABC. Por otra parte, usando el teorema 2.4.3 se obtiene que $s^2 \geq 27r^2$, de donde

$$EF^2 + FD^2 + DE^2 \leq \frac{s^2}{3}.$$

Solución 2.47

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{h_b h_c} + \frac{b^2}{h_c h_a} + \frac{c^2}{h_a h_b} &= \frac{a^2bc + b^2ca + c^2ab}{4(ABC)^2} = \frac{abc(a+b+c)}{4(ABC)^2} \\ &= \frac{abc(a+b+c)}{4\frac{abc}{4R}\frac{(a+b+c)r}{2}} = \frac{2R}{r} \geq 4.\end{aligned}$$

Solución 2.48 Recuerde que $\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$ y use que $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ (vea el ejemplo 2.5.2).

Solución 2.49 Observe que,

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq \frac{9abc}{a+b+c} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}rs \leq \frac{9 \cdot 4\,Rrs}{2s} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}s \leq 9R \Leftrightarrow \frac{2s}{3\sqrt{3}} \leq R.$$

La última desigualdad la se demostró en el teorema 2.4.3.

Solución 2.50 Use el ejercicio anterior y la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica

$$\frac{3}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}} \leq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Solución 2.51 Use el ejercicio anterior y la desigualdad $MG - MA$

$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Solución 2.52 Primero observe que si $s = \frac{a+b+c}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 - &(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 = \\ &= a^2 - (b-c)^2 + b^2 - (c-a)^2 + c^2 - (a-b)^2 \\ &= 4\{(s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) + (s-a)(s-b)\}.\end{aligned}$$

Por lo que, si $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$, entonces la desigualdad es equivalente a

$$\sqrt{3}\sqrt{xyz(x+y+z)} \leq xy + yz + zx.$$

Elevando al cuadrado y reduciendo términos, se tiene que la desigualdad anterior es equivalente a

$$xyz(x+y+z) \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Deduzca ésta última de la desigualdad de Cauchy-Schwarz con (xy, yz, zx) y (zx, xy, yz).

Solución 2.53 Use el ejercicio 2.50 y la desigualdad $3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} \leq ab + bc + ca$.

Solución 2.54 Note que

$$\begin{aligned} \frac{3(a+b+c)abc}{ab+bc+ca} \geq \frac{9abc}{a+b+c} \quad &\Leftrightarrow \quad (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \\ &\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca, \end{aligned}$$

ahora use el ejercicio 2.49.

Solución 2.55 Utilice (2.5), (2.6) y (2.7), observe que $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc = \frac{1}{2} - 2r^2$.

Solución 2.56 Utilice las relaciones usadas en la solución al ejercicio 2.39

$$\begin{aligned} \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc} &= \frac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \\ &= \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{4Rs(\frac{abc}{4R})} \\ &= \frac{8(rs)^2}{4Rs(rs)} = \frac{2r}{R}. \end{aligned}$$

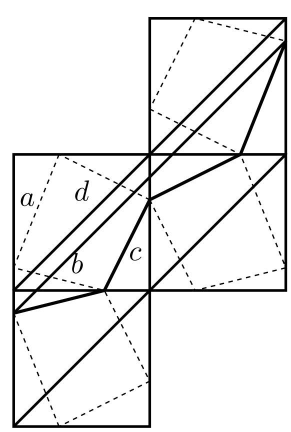
Solución 2.57 Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{s-a}+\frac{b^2}{s-b}+\frac{c^2}{s-c}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{sa}{s-a}-a+\frac{sb}{s-b}-b+\frac{sc}{s-c}-c\right)\\
&= \frac{s}{2}\left(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\right)-s\\
&= \frac{s}{2}\left[\frac{(a+b+c)s^2-2(ab+bc+ca)s+3abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right]-s\\
&= \frac{s}{2}\left[\frac{2s^3-2s(s^2+r^2+4rR)+3(4Rrs)}{r^2s}\right]-s\\
&= \frac{2s(R-r)}{r} \geq \frac{2s(R-\frac{R}{2})}{r} \geq \frac{3\sqrt{3}rR}{r} = 3\sqrt{3}R,
\end{aligned}$$

las dos últimas desigualdades se derivan del hecho que $R \geq 2r$ (lo que implica que $-r \geq \frac{-R}{2}$) y que $s \geq 3\sqrt{3}r$, respectivamente.

Solución 2.58 Debe partir del lado de las ecuaciones donde se encuentra la relación entre las τ's y realice las operaciones.

Solución 2.59 Si x_1, $1-x_1$, x_2, $1-x_2$, $\ldots$, son las longitudes en que queda dividido cada lado por el punto correspondiente, se tiene que $a^2+b^2+c^2+d^2 = \sum(x_i^2+(1-x_i)^2)$. Muestre que $\frac{1}{2} \leq 2(x_i-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2} = x_i^2+(1-x_i)^2 \leq 1$. Para la parte (ii), la desigualdad de la derecha se sigue de la desigualdad del triángulo. Para la desigualdad de la izquierda use reflexiones en los lados, como en la siguiente figura.



Solución 2.60 Esta es igual a (ii) del problema anterior.

Solución 2.61 Si ABC es el triángulo y $DEFGHI$ es el hexágono con DE, FG, HI paralelos a BC, AB, CA, respectivamente, se tiene que el perímetro del hexágono es $2(DE + FG + HI)$. Sean X, Y, Z los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA, AB, respectivamente, y sea $p = a + b + c$ el perímetro del triángulo ABC. Defina $x = AZ = AY$, $y = BZ = BX$ y $z = CX = CY$, se tiene entonces la relación

$$\frac{DE}{a} = \frac{AE + ED + DA}{p} = \frac{2x}{p}.$$

Análogamente, se tienen las otras dos relaciones

$$\frac{FG}{c} = \frac{2z}{p}, \quad \frac{HI}{b} = \frac{2y}{p}.$$

Luego,

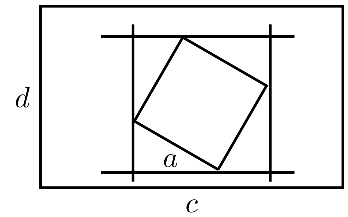
$$\begin{aligned} p(DEFGHI) = \frac{4(xa + yb + zc)}{p} &= \frac{4(a(s-a) + b(s-b) + c(s-c))}{2s} \\ &= \frac{4((a+b+c)s - (a^2 + b^2 + c^2))}{2s} \\ &= 2(a+b+c) - 4\frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)} \end{aligned}$$

pero, $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a+b+c)$ por la desigualdad de Tchebyshev. Por lo tanto, $p(DEFGHI) \leq 2(a+b+c) - \frac{4}{3}(a+b+c) = \frac{2}{3}(a+b+c)$.

Solución 2.62 Considere el circuncírculo del triángulo equilátero con lados de longitud 2. Los círculos con centro en los puntos medios de los lados del triángulo y radio 1 cubren al círculo de radio 2. Si un círculo de radio mayor que $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ es cubierto por tres círculos de radio 1, entonces uno de los tres círculos cubre una cuerda de longitud mayor a 2.

Solución 2.63 Tome el triángulo acutángulo de lados de longitud $2r_1$, $2r_2$ y $2r_3$, si existe. Su circunradio es el buscado. Si no existe el triángulo, la solución es el mayor radio entre r_1, r_2 y r_3.

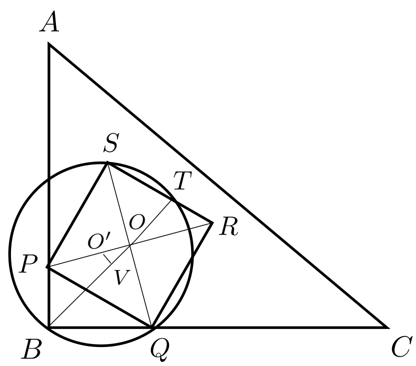
Solución 2.64 **Lema 1.** Si un cuadrado de lado de longitud a está dentro del rectángulo de lados de longitud c y d, entonces $a \leq \text{mín}\ \{c, d\}$.
Demostración.



Por los vértices del cuadrado dibujamos rectas paralelas a los lados del rectángulo de tal manera que encierren al cuadrado como se muestra en la figura. Como las rectas paralelas forman un cuadrado dentro del rectángulo se tiene el resultado.

Lema 2. La longitud de la diagonal del cuadrado inscrito en un triángulo es menor o igual a la longitud de la bisectriz interna del ángulo recto.

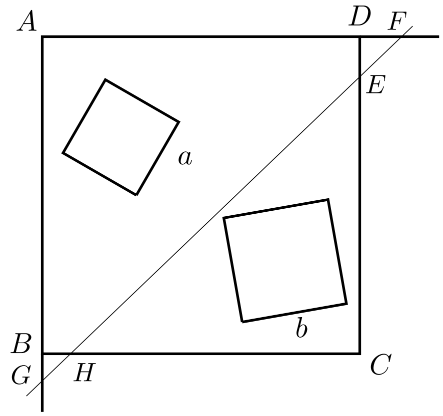
Demostración. Sea ABC un triángulo rectángulo con hipotenusa CA y sea $PQRS$ el cuadrado inscrito.



Podemos suponer que los vértices P y Q pertenecen a los catetos del triángulo rectángulo (en caso de no ser así, transladamos el cuadrado) y sea O la interesección de las diagonales PR y QS.

Como $BQOP$ es cíclico ($\angle B = \angle O = 90°$), se sigue que $\angle QBO = \angle QPO = 45°$, entonces O pertenece a la bisectriz interna del ángulo $\angle B$. Sea T la intersección de BO con RS, entonces $\angle QBT = \angle QST = 45°$, luego $BQTS$ es cíclico y el centro O' del circuncírculo de $BQTS$ es la intersección de las mediatrices de los segmentos SQ y BT, pero la mediatriz de SQ es PR, por lo tanto el punto O' pertenece a PR y si V es el punto medio de BT, se tiene que VOO' es un triángulo rectángulo. Como $O'O > O'V$, se tiene que las cuerdas SQ y BT satisfacen $SQ < BT$, que es lo que se desea.

Termine ahora la demostración del ejercicio. Sea $ABCD$ el cuadrado de lados de longitud 1 y sea l la recta que separa los dos cuadrados.



Si l es paralela a uno de los lados del $ABCD$, entonces aplique el lema 1. En caso contrario, l intersecta cada recta que determina uno de los lados del cuadrado $ABCD$. Suponga que A es el vértice más lejano a l.
Si l corta a los lados de $ABCD$ en E, F, G, H como en la figura, se tiene por el lema 2 que la suma de las diagonales de los cuadrados pequeños es menor o igual a AC, esto es $\sqrt{2}(a+b) \leq \sqrt{2}$, luego el resultado.

Solución 2.65 Si α, β, γ son los ángulos centrales que abren las cuerdas de longitudes a, b, c, respectivamente, se tiene que $a = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $b = 2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}$ y $c = 2\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$. Luego,

$$abc = 8\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} \leq 8\operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right) = 8\operatorname{sen}^3(30^\circ) = 1.$$

La desigualdad se sigue del ejercicio 1.81.

Solución 2.66 Una primera observación es ver que las diagonales son paralelas a los lados. Sea X el punto de intersección de las diagonales AD y CE. Ahora, se puede dividir el pentágono como

$$(ABCDE) = (ABC) + (ACX) + (CDE) + (EAX).$$

Como $ABCX$ es un paralelogramo, se tiene que $(ABC) = (CXA) = (CDE)$. Sean $a = (CDX) = (EAX)$ y $b = (DEX)$, entonces se obtiene que $\frac{a}{b} = \frac{AX}{XD} = \frac{(CXA)}{(CDX)} = \frac{a+b}{a}$, de donde $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ahora, ya cuenta con los elementos para encontrar $(ABCDE)$.

Solución 2.67 Primero se tiene que probar $sr = s_1R = (ABC)$, donde s_1 es el semiperímetro del triángulo DEF. Para deducir esta igualdad bastará que vea que los radios OA, OB y OC son perpendiculares a EF, FD y DE, respectivamente. Use también que $R \geq 2r$.

Solución 2.68 Suponga que el ángulo máximo es A y que éste satisface que $60° \leq A \leq 90°$, entonces la longitud de las alturas h_b y h_c son también menores a 1. Utilice ahora el hecho que $(ABC) = \frac{h_b h_c}{2 \operatorname{sen} A}$ y que $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \operatorname{sen} A \leq 1$. El caso del triángulo obtuso es más fácil.

Solución 2.69 Si $ABCD$ es el cuadrilátero con lados de longitud $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ y $d = DA$.
(i) $(ABCD) = (ABC) + (CDA) = \frac{ab \operatorname{sen} B}{2} + \frac{cd \operatorname{sen} D}{2} \leq \frac{ab+cd}{2}$.
(ii) Si $ABCD$ es el cuadrilátero mencionado con lados de longitud a, b, c y d, considere el triángulo $BC'D$ que resulta de reflejar DCB con respecto a la mediatriz de BD. Los cuadriláteros $ABCD$ y $ABC'D$ tienen la misma área pero el segundo tiene lados de longitud a, c, b y d, en este orden. Utilice ahora (i).
(iii) $(ABC) \leq \frac{ab}{2}$, $(BCD) \leq \frac{bc}{2}$, $(CDA) \leq \frac{cd}{2}$ y $(DAB) \leq \frac{da}{2}$.

Solución 2.70 En el ejemplo 2.7.6 se demostró que

$$PA \cdot PB \cdot PC \geq \frac{R}{2r}(p_a + p_b)(p_b + p_c)(p_c + p_a).$$

Utilice la desigualdad $MG - MA$.

Solución 2.71 (i) $\frac{PA^2}{p_b p_c} + \frac{PB^2}{p_c p_a} + \frac{PC^2}{p_a p_b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{PA^2}{p_b p_c}\frac{PB^2}{p_c p_a}\frac{PC^2}{p_a p_b}} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2} \geq 12.$

(ii) $\frac{PA}{p_b+p_c} + \frac{PB}{p_c+p_a} + \frac{PC}{p_a+p_b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{PA}{p_b+p_c}\frac{PB}{p_c+p_a}\frac{PC}{p_a+p_b}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{R}{2r}} \geq 3.$

(iii) $\frac{PA}{\sqrt{p_b p_c}} + \frac{PB}{\sqrt{p_c p_a}} + \frac{PC}{\sqrt{p_a p_b}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{PA}{\sqrt{p_b p_c}}\frac{PB}{\sqrt{p_c p_a}}\frac{PC}{\sqrt{p_a p_b}}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4R}{r}} \geq 6.$

Para las últimas desigualdades en (i) y (iii) se ha utilizado el ejercicio 2.70. Para la última desigualdad en (ii) use el ejemplo 2.7.6.
(iv) Proceda como en el ejemplo 2.7.5, es decir, haga una inversión en una circunferencia de centro P y radio d (arbitrario, por ejemplo $d = p_b$). Sean A', B', C' los inversos de A, B, C. Sean p'_a, p'_b, p'_c las distancias de P a los lados $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, respectivamente.
Pruebe que $p'_a = \frac{p_a PB' \cdot PC'}{d^2}$ como sigue. Se tiene que

$$p'_a B'C' = 2(PB'C') = \frac{PB' \cdot PC' \cdot B'C'}{PA'_1} = \frac{p_a PB' \cdot PC' \cdot B'C'}{d^2},$$

donde A_1' es el inverso de A_1, el pie de la perpendicular de P sobre BC. Análogamente, $p_b' = \frac{p_b PC' \cdot PA'}{d^2}$ y $p_c' = \frac{p_c PA' \cdot PB'}{d^2}$.
La desigualdad de Erdös-Mordell aplicada en el triángulo $A'B'C'$, garantiza que $PA' + PB' + PC' \geq 2(p_a' + p_b' + p_c')$.
Pero como $PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = d^2$, al sustituir se tiene que

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} \geq 2\left(\frac{p_a}{PB \cdot PC} + \frac{p_b}{PC \cdot PA} + \frac{p_c}{PC \cdot PA}\right)$$

y esta desigualdad es equivalente a

$$PB \cdot PC + PC \cdot PA + PA \cdot PB \geq 2(p_a PA + p_b PB + p_c PC).$$

Finalmente, para concluir use el ejemplo 2.7.4.

Solución 2.72 Si P es un punto interior o en el perímetro del triángulo ABC, utilice la demostración del teorema 2.7.2.
Si h_a es la longitud de la altura desde A, se tiene que el área del triángulo ABC satisface que $2(ABC) = ah_a = ap_a + bp_b + cp_c$.
Como $h_a \leq PA + p_a$ (aún si $p_a \leq 0$, esto es, si P es un punto que está fuera del triángulo, en distinto lado de BC que A), además la igualdad se da si P está sobre la altura por A. Luego $aPA + ap_a \geq ah_a = ap_a + bp_b + cp_c$, entonces $aPA \geq bp_b + cp_c$.
Puede aplicar esta desigualdad al triángulo $AB'C'$ simétrico a ABC con respecto a la bisectriz interna del ángulo A, donde $aPA \geq cp_b + bp_c$, con igualdad cuando AP pase por O.
Análogamente, $bPB \geq ap_c + cp_a$ y $cPC \geq ap_b + bp_a$, por lo tanto

$$PA + PB + PC \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) p_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) p_b + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) p_c.$$

La igualdad se da cuando P sea el circuncentro O.
Segunda Solución. Sean L, M y N los pies de las perpendiculares P sobre BC, CA y AB, respectivamente. Sean H y G la proyecciones ortogonales de B y C, respectivamente, sobre la recta MN. Luego $BC \geq HG = HN + NM + MG$.
Como $\angle BNH = \angle ANM = \angle APM$, los triángulos rectángulos BNH y APM son semejantes, por lo que $HN = \frac{PM}{PA} BN$. De manera análoga, se tiene que $MG = \frac{PN}{PA} CM$.
Por el teorema de Ptolomeo, aplicado a $AMPN$, se tiene que $PA \cdot MN = AN \cdot PM + AM \cdot PN$, por lo que

$$MN = \frac{AN \cdot PM + AM \cdot PN}{PA},$$

de donde

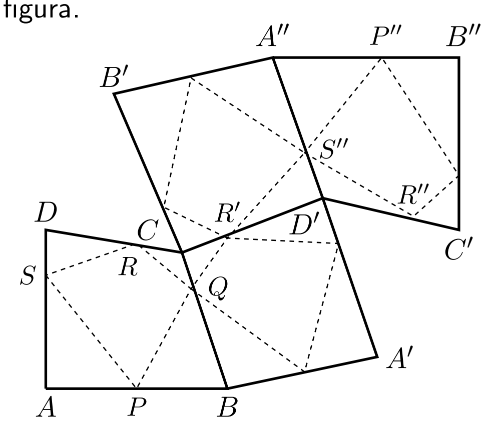
$$BC \geq \frac{PM}{PA}BN + \frac{AN \cdot PM + AM \cdot PN}{PA} + \frac{PN}{PA}CM.$$

Por lo tanto,

$$BC \cdot PA \geq PM \cdot AB + PN \cdot CA.$$

Luego, $PA \geq p_b\frac{c}{a} + p_c\frac{b}{a}$. Análogamente para las otras dos desigualdades.

Solución 2.73 Considere la sucesión de reflexiones del cuadrilátero $ABCD$, como en la siguiente figura.



Note que el perímetro de $PQRS$ es la longitud de la línea quebrada $PQR'S''P''$. Note también que $A''B''$ es paralela a AB, que la distancia más corta es AA'', como se puede ver, se logra si se proyecta O sobre los lados del cuadrilátero.

Solución 2.74 Primero note que $(DEF) = (ABC) - (AFE) - (FBD) - (EDC)$. Si $x = BD$, $y = CE$, $z = AF$, $a-x = DC$, $b-y = EA$ y $c-z = FB$, se tiene que,

$$\frac{(AFE)}{(ABC)} = \frac{z(b-y)}{cb}, \ \frac{(FBD)}{(ABC)} = \frac{x(c-z)}{ac} \text{ y } \frac{(EDC)}{(ABC)} = \frac{y(a-x)}{ba}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{(DEF)}{(ABC)} &= 1 - \frac{z}{c}\left(1 - \frac{y}{b}\right) - \frac{x}{a}\left(1 - \frac{z}{c}\right) - \frac{y}{b}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right) + \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c} = 2\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c}.\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que la concurrencia de las cevianas nos garantiza que $\frac{x}{a-x} \cdot \frac{y}{b-y} \cdot \frac{z}{c-z} = 1$. Ahora bien, el último producto es máximo cuando $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ y como los segmentos concurren el valor común es $\frac{1}{2}$. Luego, se tiene que P es el centroide.

Solución 2.75 Si $x = PD$, $y = PE$ y $z = PF$, se tiene que $2(ABC) = ax + by + cz$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)(ax+by+cz).$$

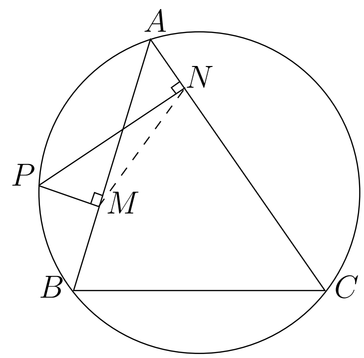
Luego, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ABC)}$. La igualdad se da cuando $x = y = z$, es decir, cuando P es el incentro.

Solución 2.76 Primero vea que $BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$, usando que $BD^2 - DC^2 = PB^2 - PC^2$ y relaciones similares.
Ahora bien, $(BD + DC)^2 = a^2$, de donde $BD^2 + DC^2 = a^2 - 2BD \cdot DC$. Análogamente, para los otros dos lados. Luego, $BD^2 + DC^2 + CE^2 + AE^2 + AF^2 + FB^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(BD \cdot DC + CE \cdot AE + AF \cdot FB)$.
Así, la suma es mínima cuando $(BD \cdot DC + CE \cdot AE + AF \cdot FB)$ sea máxima. Pero $BD \cdot DC \leq \left(\frac{BD+DC}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ y alcanza el máximo cuando $BD = DC$. Análogamente, $CE = EA$ y $AF = FB$, por lo tanto P es el circuncentro.

Solución 2.77 Como $\sqrt[3]{(aPD)(bPE)(cPF)} \leq \frac{aPD+bPE+cPF}{3} = \frac{2(ABC)}{3}$, se tiene que $PD \cdot PE \cdot PF \leq \frac{8}{27}\frac{(ABC)^3}{abc}$. Además, la igualdad ocurre si y sólo si $aPD = bPE = cPF$.
Pero $c \cdot PF = b \cdot PE \Leftrightarrow (ABP) = (CAP) \Leftrightarrow P$ está sobre la mediana AA'. De manera análoga, vea que P se encuentra en las otras medianas, entonces P es el centroide.

Solución 2.78 Usando la técnica para la demostración del teorema de Leibniz, verifique que $3PG^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, donde G es el centroide. Por lo tanto, se tiene que el punto óptimo es $P = G$.

Solución 2.79 El cuadrilátero $APMN$ es cíclico y está inscrito en la circunferencia de diámetro AP.
La cuerda MN subtiende siempre el ángulo A (o $180° - A$) por lo que la longitud de MN depende proporcionalmente del radio de la circunferencia que circunscribe a $APMN$.
Tendrá la mayor circunferencia cuando el diámetro AP sea lo más grande posible. Esto sucede cuando P es diametralmente opuesto a A. En este caso M y

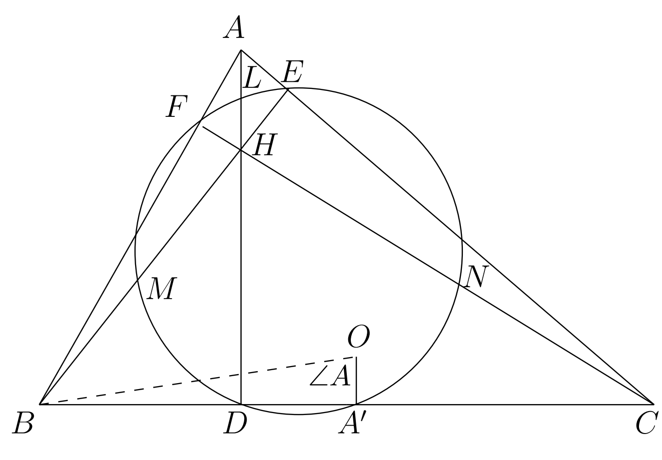


N coinciden con B y C, respectivamente. Por lo tanto, la cuerda máxima MN es BC.

Solución 2.80 El circuncírculo de DEF es el círculo de los nueve puntos de ABC, luego intersecta también los puntos medios de los lados de ABC y pasa por L, M, N, los puntos medios de AH, BH, CH, respectivamente. Note que $t_a^2 = AL \cdot AD$, luego

$$\begin{aligned}\sum \frac{t_a^2}{h_a} &= \sum \frac{AL \cdot AD}{AD} = \sum AL = \sum OA' \\ &= \sum R\cos A \leq 3R\cos\frac{A+B+C}{3} = 3R\cos 60^\circ = \frac{3}{2}R.\end{aligned}$$

Observe que se puede probar un resultado más fuerte $\sum \frac{t_a^2}{h_a} = R+r$, utilizando



el hecho que $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1$, vea el lema 2.5.2.

Solución 2.81 (i) Note que

$$\begin{aligned}\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} &= \frac{ap_a}{ah_a} + \frac{bp_b}{bh_b} + \frac{cp_c}{ch_c} \\ &= \frac{2(PBC) + 2(PCA) + 2(PAB)}{2(ABC)} = 1.\end{aligned}$$

Use ahora que

$$\left(\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c}\right)\left(\frac{h_a}{p_a} + \frac{h_b}{p_b} + \frac{h_c}{p_c}\right) \geq 9.$$

(ii) Por la desigualdad $MG - MA$ se tiene

$$27\left(\frac{p_a}{h_a}\frac{p_b}{h_b}\frac{p_c}{h_c}\right) \leq \left(\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c}\right)^3 = 1,$$

de donde se obtiene la última igualdad de (i).
(iii) Sean $x = (PBC)$, $y = (PCA)$ y $z = (PAB)$. Observe que $a(h_a - p_a) = ah_a - ap_a = 2(y + z) \geq 4\sqrt{yz}$. Análogamente, se tiene que $b(h_b - p_b) \geq 4\sqrt{zx}$ y $c(h_c - p_c) \geq 4\sqrt{xy}$. Entonces,

$$a(h_a - p_a)b(h_b - p_b)c(h_c - p_c) \geq 64xyz = 8(ap_abp_bcp_c).$$

Por lo tanto, $(h_a - p_a)(h_b - p_b)(h_c - p_c) \geq 8p_ap_bp_c$.

Solución 2.82 Suponga que $a < b < c$, luego de todas las alturas del triángulo ABC, AD es la mayor. Si E es la proyección de I sobre AD, bastará ver que $AE \geq AO = R$. Recuerde que la bisectriz del ángulo $\angle A$ es también bisectriz del ángulo $\angle EAO$. Si proyecta I en E' sobre el diámetro AA', entonces $AE = AE'$. Ahora vea que $AE' \geq AO$, mostrando que I se encuentra dentro del triángulo acutángulo COF, donde F es la intersección de AA' con BC.
Para ver que COF es un triángulo acutángulo, use que los ángulos de ABC cumplen $\angle A < \angle B < \angle C$ entonces $\frac{1}{2}\angle B < 90° - A$, $\frac{1}{2}\angle C < 90° - A$. Use también que $\angle COF = A + C - B < 90°$.

Solución 2.83 Sea ABC un triángulo con lados de longitud a, b y c. Utilice la fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo se tiene que

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{donde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}. \qquad (4.7)$$

Si s y c están fijos, entonces también está fijo $s - c$. Luego el producto de $16(ABC)^2$ es máximo cuando $(s-a)(s-b)$ sea máximo. Esto es, si $s-a = s-b$, es decir, cuando $a = b$. Por lo tanto, el triángulo es isósceles.

Solución 2.84 Sea ABC un triángulo con lados de longitud a, b y c. Como el perímetro es fijo, lo es también el semiperímetro, utilizando la ecuación (4.7), se tiene que $16(ABC)^2$ es máxima cuando $(s-a)(s-b)(s-c)$ es máximo. El producto de estos tres números es máximo cuando $(s-a) = (s-b) = (s-c)$, es decir, cuando $a = b = c$. Por lo tanto, el triángulo es equilátero.

Solución 2.85 Si a, b, c son las longitudes de los lados del triángulo, observe que $a+b+c = 2R(\operatorname{sen}\angle A + \operatorname{sen}\angle B + \operatorname{sen}\angle C) \leq 6R \operatorname{sen}\left(\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{3}\right)$, ya que la función $\operatorname{sen} x$ es cóncava. Además, se tiene la igualdad cuando $\operatorname{sen}\angle A = \operatorname{sen}\angle B = \operatorname{sen}\angle C$.

Solución 2.86 La desigualdad $(lm+mn+nl)(l+m+n) \geq a^2 l + b^2 m + c^2 n$ es equivalente a

$$\frac{l^2+m^2-c^2}{lm} + \frac{m^2+n^2-a^2}{mn} + \frac{n^2+l^2-b^2}{ln} + 3 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\angle APB + \cos\angle BPC + \cos\angle CPA + \frac{3}{2} \geq 0.$$

Ahora, use el hecho que $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \frac{3}{2} \geq 0$ es equivalente a

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \geq 0.$$

Solución 2.87 Considere el punto de Fermat F y sean $p_1 = FA$, $p_2 = FB$ y $p_3 = FC$, entonces observe primero que $(ABC) = \frac{1}{2}(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1)\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1)$. También,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= 2p_1^2+2p_2^2+2p_3^2-2p_1p_2\cos 120°-2p_2p_3\cos 120°-2p_3p_1\cos 120° \\ &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2) + p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1. \end{aligned}$$

Ahora usando que $x^2+y^2 \geq 2xy$, se tiene que $a^2+b^2+c^2 \geq 3(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1) = 3\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}(ABC)\right)$. Luego, $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}(ABC)$.
Más aún, la igualdad $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}(ABC)$ se cumple cuando $p_1^2+p_2^2+p_3^2 = p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1$, es decir, cuando $p_1 = p_2 = p_3$ y el triángulo es equilátero.

Solución 2.88 Sean a, b, c las longitudes de los lados del triángulo ABC. Defina, al igual que en el ejercicio anterior, sean $p_1 = FA$, $p_2 = FB$ y $p_3 = FC$. Recuerde que, por la solución del ejercicio anterior, se tiene

$$4\sqrt{3}(ABC) = 3(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1).$$

Luego, lo único que debe probar es

$$3(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) \leq (p_1 + p_2 + p_3)^2$$

pero, esto es equivalente a $p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1 \leq p_1^2+p_2^2+p_3^2$ que es un resultado conocido, ver ejercicio 1.27.

Solución 2.89 Como en el problema de Fermat, hay dos casos, cuando ABC tiene todos sus ángulos menores a $120°$ o cuando hay un ángulo mayor de $120°$. En el primer caso el mínimo de $PA+PB+PC$ es CC', donde C' es la imagen de A, al rotar la figura con centro en B un ángulo de $60°$ y en dirección positiva. Por la ley de los cosenos se tiene que

$$\begin{aligned}(CC')^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60°)\\ &= b^2 + c^2 - bc\cos A + bc\sqrt{3}\operatorname{sen} A\\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}(ABC).\end{aligned}$$

Ahora, utilice que $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}(ABC)$ para obtener $(CC')^2 \geq 4\sqrt{3}(ABC)$. Por el teorema 2.4.3 se tiene que $(ABC) \geq 3\sqrt{3}r^2$, por lo tanto $(CC')^2 \geq 36r^2$. En el caso en que $\angle A \geq 120°$, el punto que resuelve el problema de Fermat-Steiner es el punto A, por lo que $PA + PB + PC \geq AB + AC = b + c$. Por lo tanto, lo único que se tiene que probar es $b+c \geq 6r$. Más aún, para esto puede usar el hecho que $b = x + z$, $c = x + y$ y $r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$.

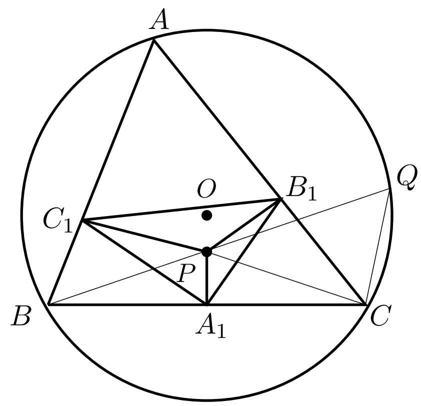
Segunda Solución. Es claro que $PA + p_a \geq h_a$, donde p_a es la distancia de P al lado BC y h_a es la longitud de la altura desde A. Luego, $h_a + h_b + h_c \leq (PA + PB + PC) + (p_a + p_b + p_c) \leq \frac{3}{2}(PA + PB + PC)$, donde la última desigualdad se debe al teorema de Erdös-Mordell.

Ahora usando el ejercicio 1.36 se tiene que $9 \leq (h_a + h_b + h_c)(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}) = (h_a + h_b + h_c)(\frac{1}{r})$. Por lo que, $9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \frac{3}{2}(PA + PB + PC)$ y de aquí el resultado.

Solución 2.90 Primero note que $(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \operatorname{sen}\angle B_1A_1C_1$. Como PB_1CA_1 es un cuadrilátero cíclico de diámetro PC, aplicando la ley de los senos se obtiene que $A_1B_1 = PC\operatorname{sen} C$. Análogamente $A_1C_1 = PB\operatorname{sen} B$.

Llame Q a la intersección de BP con el circuncírculo del triángulo ABC, luego, se tiene $\angle B_1A_1C_1 = \angle QCP$. En efecto, como PB_1CA_1 es un cuadrilátero cíclico se tiene que $\angle B_1CP = \angle B_1A_1P$. Análogamente, $\angle C_1BP = \angle C_1A_1P$. Entonces, $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1A_1P + \angle C_1A_1P = \angle B_1CP + \angle C_1BP$, pero $\angle C_1BP = \angle ABQ = \angle ACQ$. Por lo tanto, $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1CP + \angle ACQ = \angle QCP$.

Otra vez, la ley de los senos garantiza que $\frac{\operatorname{sen} \angle QCP}{\operatorname{sen} \angle BQC} = \frac{PQ}{PC}$.



$$
\begin{aligned}
(A_1B_1C_1) &= \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot A_1C_1 \operatorname{sen} \angle B_1A_1C_1 \\
&= \frac{1}{2}PB \cdot PC \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{sen} \angle QCP \\
&= \frac{1}{2}PB \cdot PC \cdot \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \, \frac{PQ}{PC} \operatorname{sen} \angle QCP \\
&= \frac{1}{2}PB \cdot PQ \cdot \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \\
&= \frac{(R^2 - OP^2)(ABC)}{4R^2}.
\end{aligned}
$$

La última igualdad se da ya que la potencia del punto P, con respecto al circuncírculo de ABC, es $PB \cdot PQ = R^2 - OP^2$ y el área del triángulo ABC está dada por $(ABC) = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$. Luego, $(A_1B_1C_1)$ es máxima cuando $P = O$, es decir, cuando $A_1B_1C_1$ es el triángulo medial.

4.3. Soluciones a los problemas del capítulo 3

Solución 3.1 Considere $a = A_1A_2$, $b = A_1A_3$ y $c = A_1A_4$ y aplique el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $A_1A_3A_4A_5$ para tener que $ab + ac = bc$, o equivalentemente que $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1$.
Como los triángulos $A_1A_2A_3$ y $B_1B_2B_3$ son semejantes $\frac{B_1B_2}{B_1B_3} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{a}{b}$ y de aquí se obtiene $B_1B_2 = \frac{a^2}{b}$. Análogamente $C_1C_2 = \frac{a^2}{c}$. Por lo que $\frac{S_B+S_C}{S_A} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2c^2+a^2b^2}{b^2c^2} = \frac{b^2+c^2}{(b+c)^2} > \frac{(b+c)^2}{2(b+c)^2} = \frac{1}{2}$. La tercera igualdad se sigue de $ab + ac = bc$ y la desigualdad por la desigualdad (1.11). La desigualdad es estricta ya que $b \neq c$.
Note que, $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)^2 - 2\frac{a^2}{bc} = 1 - 2\frac{a^2}{bc}$.
Ley de los senos aplicada al triángulo $A_1A_3A_4$ lleva a que

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{bc} &= \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7}}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7}}{2(1-\cos^2\frac{2\pi}{7})\cos\frac{2\pi}{7}} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{2\pi}{7}(1+\cos\frac{2\pi}{7})(1-\cos\frac{2\pi}{7})} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7}}{4\cos\frac{2\pi}{7}(1+\cos\frac{2\pi}{7})\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{4\cos\frac{2\pi}{7}(1+\cos\frac{2\pi}{7})} \\
&> \frac{1}{4\cos\frac{\pi}{4}(1+\cos\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.
\end{aligned}$$

Luego $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1 - 2\frac{a^2}{bc} < 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$.

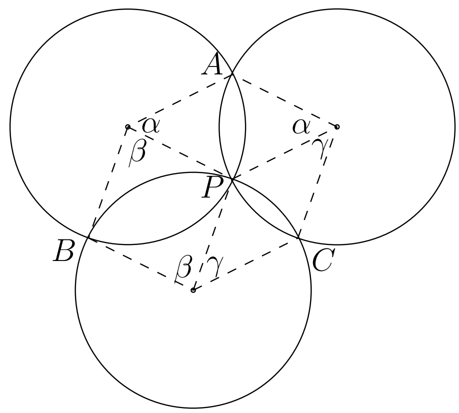
Solución 3.2 Corte el tetraedro por las aristas DA, DB, DC y desdóblelo en el plano del triángulo ABC. Las caras ABD, BCD y CAD tendrán por imagen a los triángulos ABD_1, BCD_2 y CAD_3. Vea que D_1, B y D_2 son colineales así como también lo son D_3, A y D_1, y que B y A son puntos medios de D_1D_2 y D_3D_1, respectivamente. Luego, $AB = \frac{1}{2}D_2D_3$ y por la desigualdad del triángulo $D_2D_3 \leq CD_3 + CD_2 = 2CD$. Por lo tanto $AB \leq CD$, como se quería.

Solución 3.3 Sea S el área del triángulo entonces se tienen las siguientes fórmulas $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2S}{bc}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{2S}{ca}$, $\operatorname{sen}\gamma = \frac{2S}{ab}$, y $r = \frac{S}{s} = \frac{2S}{a+b+c}$. Use estas fórmulas para obtener que la desigualdad a probar es equivalente a

$$\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)(a + b + c) \geq 9,$$

la cual puede ser mostrada usando la desigualdad $MG - MA$ en cada factor del lado izquierdo.

Solución 3.4 Suponga que los círculos son de radio 1. Sea P el punto común de los círculos y sean A, B, C los otros puntos de intersección. El área de los gajos será mínima si el punto P está dentro del triángulo ABC (sino rote un círculo $180°$ alrededor de P, y esto reducirá el área).



El área de los gajos es igual a $\pi - (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma)$, donde α, β, γ son los ángulos centrales que abren los arcos comunes de los círculos. Es claro que $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Como la función $\operatorname{sen} x$ es cóncava, el mínimo se logra cuando $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, lo que implica que los centros de las circunferencias forman un triángulo equilátero.

Solución 3.5 Sea I el incentro del triángulo ABC y dibuje la recta por I perpendicular a IC. Sean D', E' las interesecciones de esta recta con BC y CA, respectivamente. Primero pruebe que $(CDE) \geq (CD'E')$ usando que el área de $D'DI$ es mayor que el área de $EE'I$. Para esto observe que uno de los triángulos $DD'I$, $EE'I$ queda en el lado opuesto C con respecto a $D'E'$, si por ejemplo, es el triángulo $D'DI$ entonces éste tendrá área mayor o igual al área del triángulo $EE'I$, luego la desigualdad se sigue. Ahora, muestre que el área de $(CD'E')$ es $\frac{2r^2}{\operatorname{sen} C}$, para esto último note que $CI = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$ y que $D'I = \frac{r}{\cos\frac{C}{2}}$, luego

$$(CD'E') = \frac{1}{2}D'E' \cdot CI = \frac{2r^2}{2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2r^2}{\operatorname{sen} C} \geq 2r^2.$$

Solución 3.6 La clave está en notar que $2AX \geq \sqrt{3}(AB+BX)$, que se puede deducir aplicando el teorema de Ptolomeo (ejercicio 2.11) al cuadrilátero cíclico que resulta de pegar al triángulo ABX un triángulo equilátero AXO de lado AX y luego observar que el diámetro de tal circunferencia es $\frac{2}{\sqrt{3}}AX$, así se tendrá que $AX(AB+BX) = AX \cdot BO \leq AX \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}AX$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
2AD &= 2(AX+XD) \geq \sqrt{3}(AB+BX)+2XD \\
&\geq \sqrt{3}(AB+BC+CX)+\sqrt{3}XD \\
&\geq \sqrt{3}(AB+BC+CD).
\end{aligned}$$

Solución 3.7 Tome el triángulo $A'B'C'$ de área máxima de entre todos los triángulos que se pueden formar con tres vértices de los puntos dados; entonces su área satisface que $(A'B'C') \leq 1$. Construya otro triángulo ABC que tenga a $A'B'C'$ como triángulo medial; éste tiene área $(ABC) = 4(A'B'C') \leq 4$. En ABC se encuentran todos los puntos. En eferto, si algún punto Q está fuera del triángulo ABC, estará en uno de los semiplanos determinados por los lados y opuesto al semiplano donde está el tercer vérticie. Por ejemplo, si Q está en el semiplano determinado por BC, y opuesto a donde está A, el triángulo $QB'C'$ es de área mayor a $A'B'C'$, lo cual es una contradicción.

Solución 3.8 Sea $M = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. Queremos probar que M es el valor mínimo deseado, resultado que se alcanza si hacemos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$. Usando la desigualdad $MG-MA$, se tiene que $x_k^k+(k-1) = x_k^k+1+\cdots+1 \geq k\sqrt[k]{x_k^k \cdot 1 \cdots 1} = kx_k$, para toda k. Por lo tanto,

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_3^3}{3}+\cdots+\frac{x_n^n}{n} \geq x_1+x_2-\frac{1}{2}+\cdots+x_n-\frac{n-1}{n} = x_1+x_2+\cdots+x_n-n+M.$$

Por otro lado, la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética nos lleva a

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} = 1.$$

Podemos concluir que la expresión dada es al menos $n-n+M = M$. Como hemos visto podemos encontrar M y es el mínimo deseado.

Segunda Solución. Aplique la desigualdad $MG-MA$ con pesos, a los números $\left\{x_j^j\right\}$, con pesos $\left\{t_j = \frac{\frac{1}{j}}{\sum \frac{1}{j}}\right\}$, para obtener

$$\sum \frac{x_j^j}{j} \geq \left(\sum \frac{1}{j}\right)(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{\sum \frac{1}{j}}} \geq \sum \frac{1}{j}.$$

La última desigualdad se sigue de $n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \sum \frac{1}{x_j} = n$.

Solución 3.9 Note que AFE y BDC son triángulos equiláteros. Sean C' y F' puntos fuera del hexágono y de manera que ABC' y DEF' sean también triángulos equiláteros. Como BE es la mediatriz del segmento AD, se sigue que C' y F' son los reflejados de C y F en la recta BE. Use ahora que $AC'BG$ y $EF'DH$ son cíclicos, para concluir que $AG+GB = GC'$ y $DH+HE = HF'$.

Solución 3.10 El teorema de Leibniz garantiza que $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$. Como $rs = \frac{abc}{4R}$, se tiene que $2rR = \frac{abc}{a+b+c}$. Luego, lo que hay que demostrar es que $abc \leq \frac{(a+b+c)}{3}\frac{(a^2+b^2+c^2)}{3}$, para esto use $MG - MA$.

Solución 3.11 El lado izquierdo de la desigualdad se sigue de que

$$\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n} \leq \frac{1}{2}(1+x_0+\cdots+x_n) = 1.$$

Para el lado derecho considere $\theta_i = \operatorname{arcsen}(x_0+\cdots+x_i)$, para $i = 0, ..., n$. Note que

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n} &= \sqrt{1+\operatorname{sen}\theta_{i-1}}\sqrt{1-\operatorname{sen}\theta_{i-1}} \\ &= \cos\theta_{i-1}.\end{aligned}$$

Sólo resta ver ahora que $\sum \frac{\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}} < \frac{\pi}{2}$. Pero

$$\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_{i-1} = 2\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2} < (\cos\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i-1}).$$

Para probar la desigualdad use que el coseno es decreciente y que $\operatorname{sen}\theta \leq \theta$, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Luego

$$\sum \frac{\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}} < \sum \theta_i - \theta_{i-1} = \theta_n - \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Solución 3.12 Si $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ entonces $1 = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$. Por lo tanto, la desigualdad que se pide demostrar es equivalente a

$$\frac{1}{n-1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1-a_i}.$$

Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para ver que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-a_i} \sum_{i=1}^{n} (1-a_i)\,.$$

Solución 3.13 Note primero que $\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1}-x_i) = (n-1)x_{n+1}^2$. La desigualdad a demostrar se reduce a

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)} \le \sqrt{n-1}x_{n+1}.$$

Aplique Cauchy-Schwarz con $(\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ y $(\sqrt{x_{n+1}-x_1}, \ldots, \sqrt{x_{n+1}-x_n})$.

Solución 3.14 Recuerde que N también es punto medio del segmento que une los puntos medios X, Y de las diagonales AC y BD. La circunferencia de diámetro OM pasa por X y Y, ya que OX y OY son perpendiculares a las diagonales respectivas, y ON es una mediana del triángulo OXY.

Solución 3.15 La desigualdad de la derecha se deduce de $wx+xy+yz+zw = (w+y)(x+z) = -(w+y)^2 \le 0$. Para la desigualdad de la izquierda, note que

$$\begin{aligned} |wx+xy+yz+zw| &= |(w+y)(x+z)| \\ &\le \frac{1}{2}\left[(w+y)^2+(x+z)^2\right] \\ &\le w^2+x^2+y^2+z^2 = 1. \end{aligned}$$

También puede usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener

$$|wx+xy+yz+zw|^2 \le (w^2+x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) = 1.$$

Solución 3.16 Para la desigualdad de la izquierda, reacomode así

$$\frac{a_n+a_2}{a_1} + \frac{a_1+a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}+a_1}{a_n} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1},$$

ahora utilice que $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \ge 2$.
Llame $S_n = \frac{a_n+a_2}{a_1} + \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}+a_1}{a_n}$. Pruebe por inducción que $S_n \le 3n$.
Primero para $n=3$, se necesita ver que $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \le 9$. Si $a=b=c$, entonces $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = 6$ y la desigualdad es cierta. Suponga ahora que

$a \leq b \leq c$ y que no son todos iguales, entonces hay tres casos: $a = b < c$, $a < b = c$, $a < b < c$. Pero en cualquiera de ellos se tiene que $a \leq b$ y $a < c$. Luego $2c = c + c > a + b$ y $\frac{a+b}{c} < 2$, y como $\frac{a+b}{c}$ es entero positivo se tiene que $c = a + b$.
Luego, $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{a+2b}{a} + \frac{2a+b}{b} + 1 = 3 + 2\frac{b}{a} + 2\frac{a}{b}$. Como $2\frac{b}{a}$ y $2\frac{a}{b}$ deben ser enteros positivos y como $\left(2\frac{b}{a}\right)\left(2\frac{a}{b}\right) = 4$ se tiene o bien que son 2 los dos números o bien uno 1 y el otro 4. Esto quiere decir que la suma es a lo más 8, que es menor que 9, luego el resultado.
Continue con la inducción, suponga que $S_{n-1} \leq 3(n-1)$. Considere $\{a_1, \ldots, a_n\}$, si todos son iguales, $S_n = 2n$ y la desigualdad es verdadera. Suponga entonces que hay al menos dos a_i diferentes. Tome el máximo de las a_i's; sus vecinos (a_{i-1}, a_{i+1}) pueden ser iguales a este valor máximo, pero como hay entre los a_i dos diferentes, para algún máximo a_i, se tiene que uno de sus vecinos es menor que a_i. Sin perder generalidad suponga que a_n es máximo y que alguno de sus vecinos a_{n-1} o a_1 es menor que a_n. Luego, como $2a_n > a_{n-1} + a_1$ se tiene que $\frac{a_{n-1}+a_1}{a_n} < 2$ y entonces $\frac{a_{n-1}+a_1}{a_n} = 1$, por lo que $a_n = a_{n-1} + a_1$. Al sustituir este valor de a_n en S_n, obtendrá que

$$S_n = \frac{a_{n-1} + a_1 + a_2}{a_1} + \frac{a_2 + a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-2} + a_{n-1} + a_1}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_{n-1} + a_1} =$$

$$1 + \frac{a_{n-1} + a_2}{a_1} + \frac{a_2 + a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-2} + a_1}{a_{n-1}} + 1 + 1.$$

Como $S_{n-1} \leq 3(n-1)$, se concluye que $S_n \leq 3n$.

Solución 3.17 Como el cuadrilátero $OBDC$ es cíclico, utilice el teorema de Ptolomeo para demostrar que $OD = R\left(\frac{BD}{BC} + \frac{DC}{BC}\right)$, donde R es el circunradio de ABC. Por otro lado, como los triángulos BCE y DCA son semejantes, al igual que ABD y FBC, sucede que $R\left(\frac{BD}{BC} + \frac{DC}{BC}\right) = R\left(\frac{AD}{FC} + \frac{AD}{EB}\right)$. Análogamente, tenemos que $OE = R\left(\frac{BE}{AD} + \frac{BE}{CP}\right)$ y $OF = R\left(\frac{CF}{BE} + \frac{CF}{AD}\right)$. Multiplicando estas igualdades y aplicando $MG - MA$ obtendrá el resultado.
Otra forma de demostrar lo anterior es utilizando inversión. Sean D', E' y F' los puntos de intersección de AO, BO y CO con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Invierta los lados BC, CA y AB con respecto a (O, R), obtendrá los circuncírculos de los triángulos OBC, OCA y OAB, respectivamente. Luego, $OD \cdot OD' = OE \cdot OE' = OF \cdot OF' = R^2$. Si $x = (ABO)$, $y = (BCO)$ y $z = (CAO)$, se tiene que

$$\frac{AO}{OD'} = \frac{z + x}{y}, \quad \frac{BO}{OE'} = \frac{x + y}{z} \quad \text{y} \quad \frac{CO}{OF'} = \frac{y + z}{x}.$$

Lo que implica, usando $MG - MA$, que $\frac{R^3}{OD' \cdot OE' \cdot OF'} \geq 8$, por lo que, $OD \cdot OE \cdot OF \geq 8R^3$.

Solución 3.18 Primero, observe que $AY \leq 2R$ y que $h_a \leq AX$, donde h_a is la longitud de la altura sobre BC. Luego, deduzca que

$$\begin{aligned}
\sum \frac{l_a}{\operatorname{sen}^2 A} &= \sum \frac{AX}{AY \operatorname{sen}^2 A} \\
&\geq \sum \frac{h_a}{2R \operatorname{sen}^2 A} \\
&= \sum \frac{h_a}{a \operatorname{sen} A} \quad \left(\text{como } \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{1}{2R}\right) \\
&\geq 3\sqrt[3]{\frac{h_a}{a \operatorname{sen} A} \frac{h_b}{b \operatorname{sen} B} \frac{h_c}{c \operatorname{sen} C}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

como $h_a = b \operatorname{sen} C$, $h_b = c \operatorname{sen} A$, $h_c = a \operatorname{sen} B$.

Solución 3.19 Sin perder generalidad, podemos suponer $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Como $1 < 2 < \cdots < n$ se tiene, por la desigualdad del reacomodo (1.2),

$$A = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \geq nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_n = B.$$

Luego, $|A + B| = |(n+1)(x_1 + \cdots + x_n)| = n + 1$, por lo que $A + B = \pm(n+1)$. Ahora bien, si $A + B = n + 1$ se cumple que $B \leq \frac{n+1}{2} \leq A$, y si $A + B = -(n+1)$ sucede que $B \leq -\frac{n+1}{2} \leq A$.
Suponga ahora que $\frac{n+1}{2}$ o $-\frac{n+1}{2}$ están entre B y A, ya que en caso contrario A o B estarían en el intervalo $\left[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right]$. Luego, uno de los valores $|A|$ o $|B|$ es menor o igual a $\frac{n+1}{2}$ y termina el problema.
Suponga por lo tanto, $B \leq -\frac{n+1}{2} < \frac{n+1}{2} \leq A$.
Sea y_1, ..., y_n una permutación de x_1, ..., x_n tal que $1y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n = C$ toma el valor más grande con $C \leq -\frac{n+1}{2}$. Tome i tal que $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_i$ y $y_i > y_{i+1}$, y considere

$$\begin{aligned}
D &= y_1 + 2y_2 + \cdots + iy_{i+1} + (i+1)y_i + (i+2)y_{i+2} + \cdots + ny_n \\
D - C &= iy_{i+1} + (i+1)y_i - (iy_i + (i+1)y_{i+1}) = y_i - y_{i+1} > 0.
\end{aligned}$$

Como $|y_i|$, $|y_{i+1}| \leq \frac{n+1}{2}$, se tiene que $D - C = y_i - y_{i+1} \leq n + 1$; luego, $D \leq C + n + 1$ y entonces $C < D \leq C + n + 1 \leq \frac{n+1}{2}$.
Por otro lado, $D \geq -\frac{n+1}{2}$, pues C es la suma más grande que es menor a $-\frac{n+1}{2}$.
Luego, $-\frac{n+1}{2} \leq D \leq \frac{n+1}{2}$ y así $|D| \leq \frac{n+1}{2}$.

Solución 3.20 Entre los números x, y, z dos tienen el mismo signo (suponga que son x y y), como $c = z\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ es positivo, z es positivo.
Note que $a+b-c = \frac{2xy}{z}$, $b+c-a = \frac{2yz}{x}$, $c+a-b = \frac{2zx}{y}$ son positivos.
Recíprocamente, si $u = a+b-c$, $v = b+c-a$ y $w = c+a-b$ son positivos entonces haciendo $u = \frac{2xy}{z}$, $v = \frac{2yz}{x}$, $w = \frac{2zx}{y}$, podemos obtener que $a = \frac{u+w}{2} = x\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)$, etc.

Solución 3.21 Primero vea que un hexágono $ABCDEF$ centralmente simétrico tiene lados opuestos paralelos. Esto garantiza que $(ACE) = (BDF) = \frac{(ABCDEF)}{2}$. Ahora, si reflejamos los vértices del triángulo PQR con respecto al centro de simetría del hexágono, obtenemos los puntos P', Q', R' que forman el hexágono centralmente simétrico $PR'QP'RQ'$, inscrito en $ABCDEF$ y de área $2(PQR)$.

Solución 3.22 Sean $X = \sum_{i=1}^{4} x_i^3$, $X_i = X - x_i^3$; es claro que $X = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} X_i$.
Por la desigualdad $MG-MA$, $\frac{1}{3}X_1 \geq \sqrt[3]{x_2^3x_3^3x_4^3} = \frac{1}{x_1}$; análogamente, para los otros índices y esto implica que $X \geq \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}$.
Por la desigualdad de Tchebyshev se obtiene

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3}{4} \geq \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

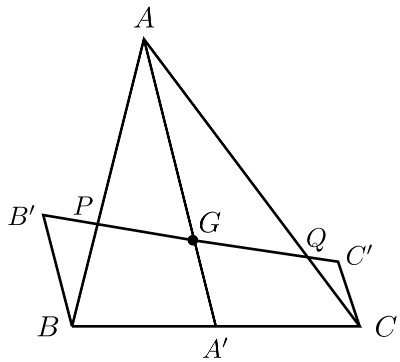
Gracias a la desigualdad $MG-MA$ se tienen $\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4} \geq \sqrt[4]{(x_1x_2x_3x_4)^2} = 1$ y por lo tanto, $X \geq \sum_{i=1} x_i$.

Solución 3.23 Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $u = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}, \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}}, \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}}\right)$ y $v = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$.

Solución 3.24 Si $\alpha = \angle ACM$ y $\beta = \angle BDM$, entonces $\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD} = \tan\alpha\tan\beta$ y $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Ahora, use el hecho de que $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \leq \tan^3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$, donde $\gamma = \frac{\pi}{4}$.
Podemos utilizar otro método el cual usa el hecho de que la desigualdad es equivalente a $(MCD) \geq 3\sqrt{3}(MAB)$ que a su vez es equivalente a $\frac{h+l}{h} \geq 3\sqrt{3}$, donde l es la longitud del lado del cuadrado y h es la longitud de la altura desde M sobre AB. Ahora, encuentre la máxima h.

Solución 3.25 Primero note que $\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN} = 1$. Ahora, use el hecho de que AL, BM y CN son menores que a.

Solución 3.26 Como $\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA}\right)^2$, es suficiente probar que $\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} = 1$.



Trace BB', CC' paralelas a la mediana AA' de tal forma que B' y C' estén en PQ. Los triángulos APG y BPB' son semejantes, y también los triángulos AQG y CQC' son semejantes, entonces $\frac{PB}{PA} = \frac{BB'}{AG}$ y $\frac{QC}{QA} = \frac{CC'}{AG}$. Use ésto junto con el hecho de que $AG = 2GA' = BB' + CC'$.

Solución 3.27 Sean Γ el circuncírculo del triángulo ABC y R su radio. Considere la inversión en Γ. Para cualquier punto P distinto de O, sea P' su inverso. El inverso del circuncírculo de OBC es la recta BC, entonces A_1', el inverso de A_1, es el punto de intersección entre el rayo OA_1 y BC. Como[7]

$$P'Q' = \frac{R^2 \cdot PQ}{OP \cdot OQ}$$

para dos puntos P, Q (distintos de O) con inversos P', Q', se tiene

$$\frac{AA_1}{OA_1} = \frac{R^2 \cdot A'A_1'}{OA' \cdot OA_1' \cdot OA_1} = \frac{AA_1'}{OA} = \frac{x+y+z}{y+z},$$

donde x, y, z denotan las áreas de los triángulos OBC, OCA y OAB, respectivamente. Análogamente, se tiene que

$$\frac{BB_1}{OB_1} = \frac{x+y+z}{z+x} \quad \text{y} \quad \frac{CC_1}{OC_1} = \frac{x+y+z}{x+y}.$$

Luego,

$$\frac{AA_1}{OA_1} + \frac{BB_1}{OB_1} + \frac{CC_1}{OC_1} = (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

[7]Vea [6], pág. 132 o [9], pág. 112.

Para la última desigualdad, vea el ejercicio 1.44.

Solución 3.28 Note que el área del triángulo GBC es, $(GBC) = \frac{(ABC)}{3} = \frac{a \cdot GL}{2}$, de donde $GL = \frac{2(ABC)}{3a}$. Análogamente, $GN = \frac{2(ABC)}{3c}$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(GNL) &= \frac{GL \cdot GN \operatorname{sen} B}{2} = \frac{4(ABC)^2 \operatorname{sen} B}{18ac} \\ &= \frac{4(ABC)^2 b^2}{(18abc)(2R)} = \frac{(ABC)^2\, b^2}{(9R\,\frac{abc}{4R})(4R)} = \frac{(ABC)\, b^2}{9 \cdot 4R^2}.\end{aligned}$$

Análogamente, $(GLM) = \frac{(ABC)\, c^2}{9 \cdot 4R^2}$ y $(GMN) = \frac{(ABC)\, a^2}{9 \cdot 4R^2}$. Por lo tanto,

$$\frac{(LMN)}{(ABC)} = \frac{1}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}\right) = \frac{R^2 - OG^2}{4R^2}.$$

La desigualdad de la derecha es ahora inmediata.
Para la otra desigualdad, note que $OG = \frac{1}{3}OH$. Como el triángulo es acutángulo, H está dentro del triángulo y lo más alejado que H está de O es R. Por lo tanto,

$$\frac{(LMN)}{(ABC)} = \frac{R^2 - \frac{1}{9}OH^2}{4R^2} \geq \frac{R^2 - \frac{1}{9}R^2}{4R^2} = \frac{2}{9} > \frac{4}{27}.$$

Solución 3.29 La función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ es convexa para $x > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{f(ab)+f(bc)+f(ca)}{3} &\geq f\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right) = \frac{3}{3+ab+bc+ca} \\ &\geq \frac{3}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

la última desigualdad se sigue de que $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$.
También se puede partir de

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{3}{2}.$$

La primera desigualdad se sigue de la desigualdad (1.11) y la segunda se sigue del ejercicio 1.27.

Solución 3.30 Defina $x = b+2c$, $y = c+2a$, $z = a+2b$. La desigualdad deseada se transforma en

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) + 3\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right) \geq 15,$$

que se resuelve aplicando la desigualdad $MG - MA$.
Otra forma de probar la desigualdad es la siguiente:

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{ab+2ca}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ca+2bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

La desigualdad se sigue inmediatamente de la desigualdad (1.11). Sólo falta probar la desigualdad $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, que es una consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Solución 3.31 Utilice la desigualdad (1.11) o bien utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz con
$\left(\frac{a}{\sqrt{a+b}}, \frac{b}{\sqrt{b+c}}, \frac{c}{\sqrt{c+d}}, \frac{d}{\sqrt{d+a}}\right)$ y $(\sqrt{a+b}, \sqrt{b+c}, \sqrt{c+d}, \sqrt{d+a})$.

Solución 3.32 Sean $x = b+c-a$, $y = c+a-b$ y $z = a+b-c$. La semejanza entre los triángulos ADE y ABC nos da que

$$\frac{DE}{a} = \frac{\text{perímetro de } ADE}{\text{perímetro de } ABC} = \frac{2x}{a+b+c}.$$

Luego, $DE = \frac{x(y+z)}{x+y+z}$, es decir, la desigualdad es equivalente a ver que $\frac{x(y+z)}{x+y+z} \leq \frac{x+y+z}{4}$. Utilice la desigualdad $MG - MA$.

Solución 3.33 Tome F sobre AD con $AF = BC$ y defina E' el punto de intersección de BF con AC. Use la ley de los senos en los triángulos $AE'F$, BCE' y BDF, para obtener

$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{AF \operatorname{sen} F}{\operatorname{sen} E'} \cdot \frac{\operatorname{sen} E'}{BC \operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} F}{\operatorname{sen} B} = \frac{BD}{FD} = \frac{AE}{EC}$$

entonces, $E' = E$.
Considere después, a G sobre BD con $BG = AD$ y a H la intersección de GE con la paralela a BC por A. Use que los triángulos ECG y EAH son semejantes, y el teorema de Menelao en el triángulo CAD, con transversal EFB, para concluir que $AH = DB$. Tendrá ahora que $BDAH$ es un paralelogramo, que $BH = AD$ y que BHG es isósceles con $BH = BG = AD > BE$.

Solución 3.34 Observe que $ab+bc+ca \leq 3abc$ si y sólo si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq 3$. Como

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9,$$

debe tenerse que $(a+b+c) \geq 3$. Entonces

$$\begin{aligned} 3(a+b+c) &\leq (a+b+c)^2 \\ &= \left(a^{3/2}a^{-1/2} + b^{3/2}b^{-1/2} + c^{3/2}c^{-1/2}\right)^2 \\ &\leq \left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ &\leq 3\left(a^3+b^3+c^3\right). \end{aligned}$$

Solución 3.35 Tome $y_i = \frac{x_i}{n-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, y suponga falsa la desigualdad, es decir,

$$\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2} + \cdots + \frac{1}{1+y_n} > n-1.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+y_i} &> \sum_{j\neq i}\left(1-\frac{1}{1+y_j}\right) = \sum_{j\neq i}\frac{y_j}{1+y_j} \\ &\geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{y_1\cdots\hat{y}_i\cdots y_n}{(1+y_1)\cdots\widehat{(1+y_i)}\cdots(1+y_n)}}, \end{aligned}$$

donde $y_1 \cdots \hat{y}_i \cdots y_n$ es el producto de las y's salvo la y_i. Entonces

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+y_i} > (n-1)^n\frac{y_1\cdots y_n}{(1+y_1)\cdots(1+y_n)},$$

y esto último lleva a que $1 > x_1 \cdots x_n$, que es una contradicción.

Solución 3.36 Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz con las colecciones $\left(\sqrt{\frac{x_1}{y_1}}, \ldots, \sqrt{\frac{x_n}{y_n}}\right)$ y $\left(\sqrt{x_1y_1}, \ldots, \sqrt{x_ny_n}\right)$ para garantizar que

$$\begin{aligned} (x_1+\cdots+x_n)^2 &= \left(\sqrt{\frac{x_1}{y_1}}\sqrt{x_1y_1}+\cdots+\sqrt{\frac{x_n}{y_n}}\sqrt{x_ny_n}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{x_1}{y_1}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}\right)(x_1y_1+\cdots+x_ny_n). \end{aligned}$$

Ahora use la condición $\sum x_iy_i \leq \sum x_i$. También puede resolverse usando la desigualdad útil (1.11).

Solución 3.37 Como $abc = 1$, tenemos que $(a-1)(b-1)(c-1) = a+b+c-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$. Análogamente,

$$(a^n-1)(b^n-1)(c^n-1) = a^n+b^n+c^n-\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\right).$$

La afirmación se sigue del hecho de que el lado izquierdo de cada una de las identidades tiene el mismo mismo signo.

Solución 3.38 Haga la demostración por inducción en n. El caso $n = 1$ es claro. Suponga el resultado cierto para n y vea que es válida la desigualdad para $n+1$.
Como se tiene que $n < \sqrt{n^2+i} < n+1$, para $i = 1, 2, ..., 2n$, sucede que

$$\left\{\sqrt{n^2+i}\right\} = \sqrt{n^2+i}-n < \sqrt{n^2+i+\left(\frac{i}{2n}\right)^2}-n = \frac{i}{2n}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{(n+1)^2}\left\{\sqrt{j}\right\} &= \sum_{j=1}^{n^2}\left\{\sqrt{j}\right\}+\sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2}\left\{\sqrt{j}\right\} \leq \frac{n^2-1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} i \\ &= \frac{(n+1)^2-1}{2}.\end{aligned}$$

Solución 3.39 Vea la contrarrecíproca, esto es, $x^3+y^3 > 2$, implica que $x^2+y^3 < x^3+y^4$. La desigualdad entre medias potenciales $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}$, implica que

$$x^2+y^2 \leq (x^3+y^3)^{2/3}\sqrt[3]{2} < (x^3+y^3)^{2/3}(x^3+y^3)^{1/3} = x^3+y^3.$$

Luego $x^2-x^3 < y^3-y^2 \leq y^4-y^3$. La última desigualdad se debe al hecho que $y^2(y-1)^2 \geq 0$.
Segunda Solución. Como $(y-1)^2 \geq 0$, se tiene que $2y \leq y^2+1$, luego $2y^3 \leq y^4+y^2$. Luego, $x^3+y^3 \leq x^3+y^4+y^2-y^3 \leq x^2+y^2$, ya que $x^3+y^4 \leq x^2+y^3$.

Solución 3.40 La desigualdad es equivalente a

$$(x_0-x_1)+\frac{1}{(x_0-x_1)}+(x_1-x_2)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)+\frac{1}{(x_{n-1}-x_n)} \geq 2n.$$

Solución 3.41 Como $\frac{a+3b}{4} \geq \sqrt[4]{ab^3}$, $\frac{b+4c}{5} \geq \sqrt[5]{bc^4}$ y $\frac{c+2a}{3} \geq \sqrt[3]{ca^2}$, tenemos que

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}.$$

Ahora, muestre que $c^{\frac{2}{15}} \geq a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{20}}$ o, equivalentemente, que $c^8 \geq a^5b^3$.

Solución 3.42 Se tiene una equivalencia entre las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned}
& 7(ab+bc+ca) \leq 2 + 9\,abc \\
\Leftrightarrow \quad & 7(ab+bc+ca)(a+b+c) \leq 2(a+b+c)^3 + 9\,abc \\
\Leftrightarrow \quad & a^2b + a\,b^2 + b^2c + b\,c^2 + c^2a + c\,a^2 \leq 2(a^3+b^3+c^3).
\end{aligned}$$

Para ver la validez de la última desigualdad, use la desigualdad del reacomodo o la desigualdad de Tchebyshev.

Solución 3.43 Sea E la intersección de AC y BD. Los triángulos ABE y DCE son semejantes, entonces

$$\frac{|AB-CD|}{|AC-BD|} = \frac{|AB|}{|AE-EB|}.$$

Usando la desigualdad del triángulo en ABE, se tiene que $\frac{|AB|}{|AE-EB|} \geq 1$ y concluya entonces que $|AB-CD| \geq |AC-BD|$. Análogamente, $|AD-BC| \geq |AC-BD|$.

Solución 3.44 Muestre, que siempre se tiene que $a_1+\cdots+a_j \geq \frac{j(j+1)}{2n}a_n$, para $j \leq n$, de la siguiente forma. Primero pruebe que la desigualdad es válida para $j=n$, es decir, $a_1+\cdots+a_n \geq \frac{n+1}{2}a_n$; use el hecho de que $2(a_1+\cdots+a_n) = (a_1+a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1}+a_1) + 2a_n$. Luego, pruebe que si $b_j = \frac{a_1+\cdots+a_j}{1+\cdots+j}$, entonces $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \frac{a_n}{n}$ (para probar por inducción que $b_j \geq b_{j+1}$, necesitamos probar que, $b_j \geq \frac{a_{j+1}}{j+1}$, lo cual se sigue de la primera parte para $n=j+1$).

Damos otra demostración de $a_1+\cdots+a_j \geq \frac{j(j+1)}{2n}a_n$, nuevamente usando inducción. Es claro que

$$a_1 \geq a_1$$

$$a_1 + \frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \geq \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} = a_2.$$

Ahora bien, supongamos que la afirmación es válida para $n = 1, \ldots, j$, es decir,

$$\begin{array}{rcl} a_1 & \geq & a_1 \\ a_1 + \dfrac{a_2}{2} & \geq & a_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \cdots + \dfrac{a_j}{j} & \geq & a_j. \end{array}$$

Sumando todas las desigualdades anteriores se tiene

$$ja_1 + (j-1)\frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_j}{j} \geq a_1 + \cdots + a_j.$$

Sumando de ambos lados la identidad

$$a_1 + 2\frac{a_2}{2} + \cdots + j\frac{a_j}{j} = a_j + \cdots + a_1$$

se tiene que

$$(j+1)\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_j}{j}\right) \geq (a_1+a_j)+(a_2+a_{j-1})+\cdots+(a_j+a_1) \geq ja_{j+1}.$$

Luego,

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_j}{j} \geq \frac{j}{j+1}a_{j+1}.$$

Finalmente, sumando $\frac{a_{j+1}}{j+1}$ en ambos lados de la desigualdad, terminamos el último paso de la prueba por inducción.
Ahora,

$$\begin{array}{rcl} a_1 + \dfrac{a_2}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n} & = & \dfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)(a_1 + \cdots + a_j) \\ & \geq & \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n(n+1)}{2n}a_n\right) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j(j+1)}\frac{j(j+1)}{2n}a_n = a_n. \end{array}$$

Solución 3.45

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\right)^4 &= \left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\right)^2 \\
&\geq 4\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i^2\right)\left(2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\right) \\
&= 8\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i^2\right)\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\right) \\
&= 8\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j(x_1^2+\cdots+x_n^2) \\
&\geq 8\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2).
\end{aligned}$$

Para la primera desigualdad se aplica la desigualdad $MG - MA$.
Para determinar cuándo la igualdad ocurre, note que en el último paso dos de las x_i deben ser diferentes de cero y las $n-2$ restantes iguales a cero; además, en el paso en el que se usó la desigualdad $MG - MA$, las x_i diferentes de cero deben ser iguales. Se puede comprobar que, en tal caso, la constante $C = \frac{1}{8}$ es la mínima.

Solución 3.46 Sea $\sqrt[3]{a} = x$ y $\sqrt[3]{b} = y$, necesita mostrar que $(x^2+y^2)^3 \leq 2(x^3+y^3)^2$, para $x,\ y > 0$.
Por la desigualdad $MG - MA$ tenemos

$$3x^4y^2 \leq x^6 + x^3y^3 + x^3y^3$$

y

$$3x^2y^4 \leq y^6 + x^3y^3 + x^3y^3,$$

con igualdad si y sólo si $x^6 = x^3y^3 = y^6$ o, equivalentemente, si y sólo si $x = y$.
Sumando estas dos desigualdades y sumando $x^6 + y^6$ a ambos lados, obtendrá

$$x^6 + y^6 + 3x^2y^2(x^2+y^2) \leq 2(x^6+y^6+2x^3y^3).$$

La igualdad ocurre cuando $x = y$, esto es, cuando $a = b$.

Solución 3.47 Denote por S el lado izquierdo de la desigualdad. Como $a \geq b \geq c$ y $x \geq y \geq z$, por la desigualdad del reacomodo obtiene $bz + cy \leq by + cz$, entonces

$$(by+cz)(bz+cy) \leq (by+cz)^2 \leq 2((by)^2+(cz)^2).$$

Defina $\alpha = (ax)^2$, $\beta = (by)^2$, $\gamma = (cz)^2$, luego,

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} \geq \frac{a^2x^2}{2((by)^2+(cz)^2)} = \frac{\alpha}{2(\beta+\gamma)}.$$

Sumando las otras dos desigualdades similares, obtendrá

$$S \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right).$$

Para terminar la demostración use la desigualdad de Nesbitt.

Solución 3.48 Si XM es una mediana en el triángulo XYZ, entonces, como resultado de utilizar el teorema de Stewart, $XM^2 = \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{2}XZ^2 - \frac{1}{4}YZ^2$. Sustituya (X, Y, Z, M) por (A, B, C, P), (B, C, D, Q), (C, D, A, R) y (D, A, B, S) en esta fórmula y sumando las cuatro ecuaciones obtenidas, se tiene una quinta ecuación. Multiplicando ambos lados de la quinta ecuación por 4, encontrará que el lado izquierdo de la desigualdad deseada es igual a $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2+4(AC^2+BD^2)$. Luego, es suficiente mostrar que $AC^2+BD^2 \leq AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$. Esta desigualdad es conocida como la "desigualdad del paralelogramo". Para demostrarla, sea O un punto arbitrario en el plano y, para cada punto X sea x el vector de O a X. Desarrolle cada uno de los términos en $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2-AC^2-BD^2$, por ejemplo, escribiendo

$$AB^2 = |a-b|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2$$

y encontrará que esta expresión es igual a

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 - 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d + d \cdot a - a \cdot c - b \cdot d)$$

$$= |a+c-b-d|^2 \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $a + c = b + d$, esto es, si el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

Solución 3.49 Defina $A = x^2+y^2+z^2$, $B = xy+yz+zx$, $C = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$, $D = xyz$. Entonces $1 = A+2B$, $B^2 = C+2xyz(x+y+z) = C+2D$, y $x^4+y^4+z^4 = A^2-2C = 4B^2-4B+1-2C = 2C-4B+8D+1$. Entonces, la expresión del centro es igual a

$$3 - 2A + (2C - 4B + 8D + 1) = 2 + 2C + 8D \geq 2,$$

con igualdad si y sólo si dos de las variables x, y, z son cero.

Ahora, la expresión de la derecha es igual a $2 + B + D$. Luego, se tiene que demostrar que $2C + 8D \leq B + D$ o $B - 2B^2 - 3D \geq 0$. Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener $A \geq B$, luego $B(1 - 2B) = BA \geq B^2$. Entonces es suficiente demostrar que $B^2 - 3D = C - D \geq 0$. Pero $C \geq xyyz + yzzx + zxxy = D$ lo cual se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Solución 3.50 Suponga que $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$. La desigualdad es equivalente a

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) \leq 1,$$

que se reescribe como $(x+z-y)(x+y-z)(y+z-x) \leq xyz$. Esta última es válida si x, y, z son las longitudes de los lados de un triángulo. Vea el ejemplo 2.2.3.

Falta considerar el caso en que algunas de las variables $u = x + z - y$, $v = x + y - z$, $w = y + z - x$ sean negativas. Si una o tres de ellas son negativas entonces el lado izquierdo es negativo y la desigualdad es evidente. Si dos de los valores u, v, w son negativos, por ejemplo u y v, entonces también $u + v = 2x$ es negativa; pero $x > 0$, pero esta última situación no es posible.

Solución 3.51 Note primero que $abc \leq a + b + c$ implica que $(abc)^2 \leq (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, donde la última desigualdad se sigue de la desigualdad (1.11).

Por la desigualdad $MG - MA$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$, luego $(a^2+b^2+c^2)^3 \geq 3^3(abc)^2$. Por lo tanto $(a^2 + b^2 + c^2)^4 \geq 3^2(abc)^4$.

Solución 3.52 Por la desigualdad $MG - MA$,

$$(a+b)(a+c) = a(a+b+c) + bc \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Segunda Solución. Defina $x = a + b$, $y = a + b$, $z = b + c$, tendrá que x, y, z son las longitudes de los lados del triángulo XYZ, ya que a, b, c son positivos. Entonces, por la fórmula del área del triángulo de la sección 2.2 la desigualdad es equivalente a $\frac{xy}{2} \geq (XYZ)$. Ahora, use que el área del triángulo con lados de longitud x, y, z es menor o igual a $\frac{xy}{2}$.

Solución 3.53 Como $x_i \geq 0$, entonces $x_i - 1 \geq -1$. Luego, puede usar la desigualdad de Bernoulli para toda i, y obtener

$$(1 + (x_i - 1))^i \geq 1 + i(x_i - 1).$$

Sumando estas desigualdades para $1 \leq i \leq n$, obtendrá el resultado.

Solución 3.54 Restando 2, se obtiene que las desigualdades son equivalentes a

$$0 < \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{abc} \leq 1.$$

La desigualdad de la izquierda es ahora obvia. La desigualdad de la derecha es el ejemplo 2.2.3.

Solución 3.55 Si muestra que $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$, será claro como obtener el resultado. Esta última desigualdad es equivalente a

$$\left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2 \geq a^{2/3}(a^2+8bc).$$

Aplique la desigualdad $MG - MA$ en cada factor de

$$\left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2 - \left(a^{4/3}\right)^2 = \left(b^{4/3}+c^{4/3}\right)\left(a^{4/3}+a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right).$$

Otra forma de resolver el problema es la siguiente, considere la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; esta función es convexa para $x > 0$ ($f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} > 0$). Para $0 < a$, b, $c < 1$, con $a+b+c = 1$, se tiene que $\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{b}{\sqrt{y}} + \frac{c}{\sqrt{z}} \geq \frac{1}{\sqrt{ax+by+cz}}$. Aplicando esto a $x = a^2+8bc$, $y = b^2+8ca$ y $z = c^2+8ab$ (antes multiplique por un factor para tener la condición $a+b+c = 1$), obtendrá

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}.$$

Use también que,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc \\ &\geq a^3+b^3+c^3+24abc.\end{aligned}$$

Solución 3.56 Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$, con $a_i = 1$, $b_i = \frac{x_i}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_i^2}$, se tiene que

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum b_i^2}.$$

Luego, es suficiente demostrar que $\sum b_i^2 < 1$. Para $i = 1$, use que $b_1^2 \leq \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 1 - \frac{1}{x_1^2}$.

Observe que para $i \geq 2$,

$$\begin{aligned}
b_i^2 = \left(\frac{x_i}{1+x_1^2+\cdots+x_i^2}\right)^2 &= \frac{x_i^2}{(1+x_1^2+\cdots+x_i^2)^2} \\
&\leq \frac{x_i^2}{(1+x_1^2+\cdots+x_{i-1}^2)(1+x_1^2+\cdots+x_i^2)} \\
&= \frac{1}{(1+x_1^2+\cdots+x_{i-1}^2)} - \frac{1}{(1+x_1^2+\cdots+x_i^2)}.
\end{aligned}$$

Para $i=1$, use que $b_1^2 \leq \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 1 - \frac{1}{1+x_1^2}$.
Sume las desigualdades, la suma de la derecha es telescópica, por lo que,

$$\sum b_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{1+x_1^2+\cdots+x_i^2}\right)^2 \leq 1 - \frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < 1.$$

Solución 3.57 Como sólo existen dos valores posibles para α, β, γ, los tres deben ser iguales, o dos iguales y uno diferente de los otros dos. Por lo tanto, hay dos casos a considerar.
(1) $\alpha = \beta = \gamma$. En este caso, se tiene que $a+b+c=0$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right)^2 &= \left(\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{-ab(a+b)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(a+b)^2-a^2+ab-b^2}{ab}\right)^2 = \left(\frac{3ab}{ab}\right)^2 = 9.
\end{aligned}$$

(2) Sin pérdida de generalidad, puede suponer que $\alpha = \beta$, $\gamma \neq \alpha$, entonces $c = a+b$ y

$$\begin{aligned}
\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} &= \frac{a^3+b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)} = \frac{(a+b)^2+a^2-ab+b^2}{ab} \\
&= \frac{2a^2+2b^2+ab}{ab} = 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1.
\end{aligned}$$

Si a y b tienen el mismo signo, vea que esta expresión no es menor que 5, y su cuadrado es, por lo tanto, no menor a 25. Si los signos de a y b no son el mismo, se tiene $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2$, por lo tanto $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1 \leq -3$ y $\left(2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\right)^2 \geq 9$. Entonces, el valor posible más pequeño es 9.

Solución 3.58 Use la desigualdad $MG-MA$, para ver que $\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{XY}$, donde $X = \sqrt[3]{abc}$, $Y = \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Use $MG-MA$

nuevamente, para obtener que $X \leq \frac{a+b+c}{3}$ y $Y \leq 2\frac{a+b+c}{3}$. Luego, $\frac{3}{XY} \geq \left(\frac{27}{2}\right)\frac{1}{(a+b+c)^2}$.

Solución 3.59 La desigualdad es equivalente a $a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$, que se sigue directamente del teorema de Muirhead, ya que $[4,0,0] \geq [2,1,1]$.
Segunda Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} &= \frac{a^4}{abc}+\frac{b^4}{abc}+\frac{c^4}{abc} \\
&\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3abc} \\
&\geq \frac{(a+b+c)^4}{27abc} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\frac{(a+b+c)}{abc} \\
&\geq (abc)\left(\frac{a+b+c}{abc}\right) = a+b+c.
\end{aligned}$$

En las primeras dos desigualdades aplicamos la desigualdad (1.11), y en la última desigualdad aplicamos la desigualdad $MG-MA$.

Solución 3.60 Considere a $f(x)$ como $f(x)=\frac{x}{1-x}$. Como $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}>0$, $f(x)$ es convexa. Usando la desigualdad de Jensen se obtiene $f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f(\frac{x+y+z}{3})$. Pero f es creciente para $x<1$, y la desigualdad $MG-MA$ le ayudará a probar que $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, se tiene $f(\frac{x+y+z}{3}) \geq f(\sqrt[3]{xyz})$.

Solución 3.61

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right) \geq 1$$

es equivalente a $(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b) \geq 8(b+c)(c+a)(a+b)$.
Ahora, observe que $(2a+b+c)=(a+b+a+c) \geq 2\sqrt{(a+b)(c+a)}$.

Solución 3.62 La desigualdad del problema es equivalente a la siguiente desigualdad

$$\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{c^2}+\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{a^2}+\frac{(c+a-b)(c+a+b)}{b^2} \geq 9,$$

la cual a su vez es equivalente a $\frac{(a+b)^2}{c^2}+\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2} \geq 12$. Como $(a+b)^2 \geq 4ab$, $(b+c)^2 \geq 4bc$ y $(c+a)^2 \geq 4ca$, se tiene que

$$\frac{(a+b)^2}{c^2}+\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2} \geq \frac{4ab}{c^2}+\frac{4bc}{a^2}+\frac{4ca}{b^2} \geq 12\sqrt[3]{\frac{(ab)(bc)(ca)}{c^2a^2b^2}} = 12.$$

Solución 3.63 Por la desigualdad $MG-MA$, $x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}\geq 3x$. Sumando desigualdades similares para y, z, se obtiene $x^2+y^2+z^2+2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\geq 3(x+y+z)=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$.

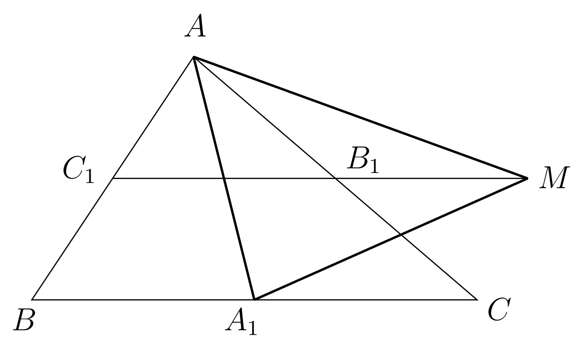
Solución 3.64 Multiplicando por $\sqrt{abc}$ la igualdad $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, se tiene $\sqrt{abc}=\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}$. Entonces, es suficiente demostrar que $\sqrt{c+ab}\geq\sqrt{c}+\sqrt{\frac{ab}{c}}$. Elevando al cuadrado la última desigualdad es equivalente a $c+ab\geq c+\frac{ab}{c}+2\sqrt{ab}$ o $c+ab\geq c+ab(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+2\sqrt{ab}$ o $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

Solución 3.65 Como $(1-a)(1-b)(1-c)=1-(a+b+c)+ab+bc+ca-abc$ y como $a+b+c=2$, la desigualdad es equivalente a

$$0\leq(1-a)(1-b)(1-c)\leq\frac{1}{27}.$$

Pero $a<b+c=2-a$ implica que $a<1$ y, análogamente, $b<1$ y $c<1$, entonces la desigualdad de la izquierda es verdadera. La otra desigualdad se sigue de la desigualdad $MG-MA$.

Solución 3.66 Es posible construir otro triángulo AA_1M, de lados AA_1, A_1M, MA de longitud igual a las medianas m_a, m_b, m_c.



Además, $(AA_1M)=\frac{3}{4}(ABC)$. Entonces la desigualdad que se tiene que demostrar es,

$$\frac{1}{m_am_b}+\frac{1}{m_bm_c}+\frac{1}{m_cm_a}\leq\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{(AA_1M)}.$$

Ahora, la última desigualdad será verdadera si la siguiente desigualdad se satisface para las longitudes de los lados de un triángulo a, b, c y área S, es decir,

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4S},$$

la cual es equivalente a

$$4\sqrt{3}S \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

que a su vez es el ejemplo 2.4.6.

Solución 3.67 Sustituya $cd = \frac{1}{ab}$ y $da = \frac{1}{bc}$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad se convierte en

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+ab}{ab+abc} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+bc}{bc+bcd} \tag{4.8}$$

$$= (1+ab)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{ab+abc}\right) + (1+bc)\left(\frac{1}{1+b} + \frac{1}{bc+bcd}\right).$$

Ahora, use la desigualdad $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, para obtener

$$\begin{aligned}
\text{(Lado izquierdo)} \quad &\geq \quad (1+ab)\frac{4}{1+a+ab+abc} + (1+bc)\frac{4}{1+b+bc+bcd} \\
&= \quad 4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc} + \frac{1+bc}{1+b+bc+bcd}\right) \\
&= \quad 4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc} + \frac{a+abc}{a+ab+abc+abcd}\right) = 4.
\end{aligned}$$

Solución 3.68 Por el teorema de Stewart se tiene que

$$l_a^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) = \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2 - a^2) \leq \frac{1}{4}((b+c)^2 - a^2).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\begin{aligned}
(l_a + l_b + l_c)^2 \quad &\leq \quad 3(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2) \\
&\leq \quad \frac{3}{4}((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 - a^2 - b^2 - c^2) \\
&= \quad \frac{3}{4}(a+b+c)^2.
\end{aligned}$$

Solución 3.69 Como $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{b+c}$ la desigualdad es equivalente a

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2}{2a+b+c} + \frac{2}{2b+a+c} + \frac{2}{2c+a+b}.$$

Ahora, use que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$, para ver que,

$$2\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{4}{a+b+2c}+\frac{4}{b+c+2a}+\frac{4}{c+a+2b}$$

lo cual muestra la desigualdad.

Solución 3.70 Podemos suponer que $a\leq b\leq c$. Entonces $c<a+b$ y

$$\frac{\sqrt[n]{2}}{2}=\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b+c)>\frac{\sqrt[n]{2}}{2}(2c)=\sqrt[n]{2c^n}\geq\sqrt[n]{b^n+c^n}.$$

Como $a\leq b$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(b+\frac{a}{2}\right)^n &= b^n+nb^{n-1}\frac{a}{2}+\text{otros términos positivos}\\ &> b^n+\frac{n}{2}ab^{n-1}\geq b^n+a^n.\end{aligned}$$

Análogamente, ya que $a\leq c$, se tiene $(c+\frac{a}{2})^n>c^n+a^n$; por lo tanto

$$\begin{aligned}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}} &< b+\frac{a}{2}+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}+c+\frac{a}{2}\\ &= a+b+c+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}=1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.\end{aligned}$$

Segunda Solución. Recuerde que, a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo si y sólo si existen números positivos x, y, z con $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$. Como $a+b+c=1$, se tiene que $x+y+z=\frac{1}{2}$.
Ahora, use la desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^m\right)^{\frac{1}{m}}\leq\left(\sum_{i=1}^n x_i^m\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^m\right)^{\frac{1}{m}},$$

para obtener

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=((y+z)^n+(z+x)^n)^{\frac{1}{n}}\leq(x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}+(2z^n)^{\frac{1}{n}}<c+\sqrt[n]{2}z.$$

Análogamente, $(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}<a+\sqrt[n]{2}x$ y $(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<b+\sqrt[n]{2}y$. Por lo tanto,

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<a+b+c+\sqrt[n]{2}(x+y+z)=1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

Solución 3.71 Note primero que si restringe las sumas con $i < j$, entonces ellas suman la mitad. La suma de la izquierda está elevada al cuadrado y la suma de la derecha no, entonces la desigualdad deseada con sumas restringidas a $i < j$, tiene $(1/3)$, en lugar de $(2/3)$, en el lado derecho.
Considere las sumas de todos los $|x_i - x_j|$, con $i < j$. El término x_1 aparece en $(n-1)$ términos con signo negativo, x_2 aparece en un término con signo positivo y en $(n-2)$ términos con signo negativo, etc. Entonces, se obtiene que

$$-(n-1)x_1 - (n-3)x_2 - (n-5)x_3 - \cdots + (n-1)x_n = \sum (2i-1-n)x_i.$$

Ahora, puede usar la desigualdad Cauchy-Schwarz para mostrar que el cuadrado de esta suma es menor que $\sum x_i^2 \sum (2i-1-n)^2$.
Analizando la suma del otro lado de la desigualdad deseada, observe inmediatamente que es $n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$. Nos gustaría desaparecer el segundo término, pero esto es fácil, ya que si suma h a cada x_i, las sumas en la desigualdad deseada no se afectan, ya que ellas usan sólo diferencias de x_i. Luego, puede escoger h tal que $\sum x_i$ sea cero. Luego, la demostración se termina si se puede mostrar que $\sum (2i-1-n)^2 = \frac{n(n^2-1)}{3}$,

$$\begin{aligned}
\sum (2i-1-n)^2 &= 4\sum i^2 - 4(n+1)\sum i + n(n+1)^2 \\
&= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)^2 + n(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(2(2n+1) - 6(n+1) + 3(n+1)) \\
&= \frac{1}{3}n(n^2-1).
\end{aligned}$$

Con lo que se obtiene la desigualdad que se quería.
Segunda Solución. La desigualdad es del tipo de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y como el problema pide que será igualdad cuando x_1, x_2, ... , x_n sea una progresión aritmética, es decir, cuando $x_i - x_j = r(i-j)$, con $r > 0$, entonces considere la siguiente desigualdad, ya garantizada por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{i,j} |i-j|\,|x_j - x_j| \right)^2 \le \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \sum_{i,j} (i-j)^2.$$

Aquí está asegurado que la igualdad se da si y sólo si $(x_i - x_j) = r(i-j)$, con $r > 0$.

Como $\sum\limits_{i,j}(i-j)^2 = (2n-2)\cdot 1^2 + (2n-4)\cdot 2^2 + \cdots + 2\cdot(n-1)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6}$.
Bastará mostrar que $\sum\limits_{i,j}|i-j|\,|x_i - x_j| = \frac{n}{2}\sum\limits_{i,j}|x_i - x_j|$. Para ver que esto último sucede, compare el coeficiente de x_i en cada lado. En el lado izquierdo se tiene

$$(i-1)+(i-2)+\cdots+(i-(i-1))-((i+1)-i)+((i+2)-i)+\cdots+(n-i)) =$$

$$= \frac{(i-1)i}{2} - \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \frac{n(2i-n-1)}{2}.$$

El coeficiente de x_i en el lado derecho es,

$$\frac{n}{2}\left(\sum_{i<j}1 + \sum_{j>i} -1\right) = \frac{n}{2}\left((i-1)-(n-i)\right) = \frac{n(2i-n-1)}{2}.$$

Como son iguales se termina la prueba.

Solución 3.72 Sean $x_{n+1} = x_1$ y $x_{n+2} = x_2$. Defina

$$a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}} \quad \text{y} \quad b_i = x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Es claro que

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 3\sum_{i=1}^{n} x_i = 3.$$

La desigualdad es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{n^2}{3}.$$

Usando la desigualdad $MG - MA$, puede deducir que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \sqrt[n]{b_1\cdots b_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{n} \geq \sqrt[n]{b_1\cdots b_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}} \geq \frac{n}{3}.$$

Por otra parte y usando nuevamente la desigualdad $MG - MA$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_n}{b_n}} = n\frac{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}{\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}} \geq \frac{n^2}{3}.$$

Solución 3.73 Para cualquier a número real positivo $a + \frac{1}{a} \geq 2$, con igualdad si y sólo si $a = 1$. Como los números ab, bc y ca son no-negativos, se tiene

$$\begin{aligned}
P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) &= (ax^2+bx+c)\left(a\frac{1}{x^2}+b\frac{1}{x}+c\right)\\
&= a^2+b^2+c^2+ab\left(x+\frac{1}{x}\right)+bc\left(x+\frac{1}{x}\right)+ca\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\\
&\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2=P(1)^2.
\end{aligned}$$

La igualdad se tiene si y sólo si $x = 1$ o $ab = bc = ca = 0$, que por la condición $a > 0$, implica que $b = c = 0$. Consecuentemente, para cualquier número real positivo x, se tiene

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2,$$

con igualdad si y sólo si $x = 1$ o $b = c = 0$.

Segunda Solución. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener

$$\begin{aligned}
P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) &= (ax^2+bx+c)\left(a\frac{1}{x^2}+b\frac{1}{x}+c\right)\\
&= \left((\sqrt{a}x)^2+(\sqrt{bx})^2+(\sqrt{c})^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right)^2+(\sqrt{c})^2\right)\\
&\geq \left(\sqrt{a}x\frac{\sqrt{a}}{x}+\sqrt{bx}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}+\sqrt{c}\sqrt{c}\right)^2=(a+b+c)^2=(P(1))^2.
\end{aligned}$$

Solución 3.74

$$\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b}{2abc+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b} \geq \frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b \geq 6abc\\
&\Leftrightarrow [2,1,0] \geq [1,1,1].
\end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue del teorema de Muirhead.

Segunda Solución. Use la desigualdad (1.11) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Solución 3.75 Use la desigualdad $MG - MA$ en cada denominador, para obtener

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geq\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+c^2+a^2}.$$

Ahora, usando la desigualdad (1.11), se obtiene

$$\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+c^2+a^2}\geq\frac{(1+1+1)^2}{3+2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{9}{3+2\cdot 3}=1.$$

Solución 3.76 La desigualdad es equivalente a cada una de las siguientes desigualdades

$$x^4+y^4+z^4+3(x+y+z)\geq -(x^3z+x^3y+y^3x+y^3z+z^3y+z^3x)$$

$$x^3(x+y+z)+y^3(x+y+z)+z^3(x+y+z)+3(x+y+z)\geq 0$$

$$(x+y+z)(x^3+y^3+z^3-3xyz)\geq 0.$$

La identidad (1.9) muestra que la última desigualdad es equivalente a $\frac{1}{2}(x+y+z)^2((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)\geq 0$.

Solución 3.77 Sean O y I el circuncentro y el incentro de un triángulo acutángulo ABC, respectivamente. Los puntos O, M, X son colineales y, OCX y OMC son triángulos rectángulos semejantes. De donde se tiene

$$\frac{OC}{OX}=\frac{OM}{OC}.$$

Como $OC = R = OA$, se tiene $\frac{OA}{OM}=\frac{OX}{OA}$. Luego, OAM y OXA son semejantes, entonces $\frac{AM}{AX}=\frac{OM}{R}$.
Ahora es suficiente mostrar que $OM \leq r$. Compare los ángulos $\angle OBM$ y $\angle IBM$. Como ABC es acutángulo, O y I son puntos interiores de ABC. Ahora, se tiene que $\angle OBM = \frac{\pi}{2} - \angle A = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) - \angle A = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C - \angle A) \leq \frac{\angle B}{2} = \angle IBM$, donde la desigualdad se sigue ya que $\angle C < \angle A$. Análogamente, se tiene que $\angle OCM \leq \angle ICM$. Luego, el punto O es un punto interior de IBC, de donde $OM \leq r$.

Solución 3.78 Defina $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$, la desigualdad es equivalente a

$$x^6+y^6+z^6\geq x^4yz+y^4zx+z^4xy.$$

Esto se sigue del teorema de Muirhead, ya que $[6,0,0]\geq[4,1,1]$.

Solución 3.79 Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para ver que $\sqrt{xy}+z=\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{z}\sqrt{z}\leq\sqrt{x+z}\sqrt{y+z}=\sqrt{xy+z(x+y+z)}=\sqrt{xy+z}$. Análogamente, $\sqrt{yz}+x\leq\sqrt{yz+x}$ y $\sqrt{zx}+y\leq\sqrt{zx+y}$. Por lo tanto,

$$\sqrt{xy+z}+\sqrt{yz+x}+\sqrt{zx+y}\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+x+y+z.$$

Solución 3.80 Por el ejemplo 1.4.11, se tiene que

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3}.$$

Ahora,

$$a^3+b^3+c^3\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)(a^2+b^2+c^2)\geq\sqrt[3]{abc}(ab+bc+ca)\geq ab+bc+ca,$$

donde se utilizaron la desigualdad $MG-MA$ y la desigualdad Cauchy-Schwarz.

Solución 3.81 Use el ejemplo 1.4.11, obtendrá $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\leq 3(a^3+b^3+c^3)$, pero si por hipótesis $(a+b+c)^2\geq 3(a^3+b^3+c^3)$ entonces $a+b+c\leq 1$. Por otra parte,

$$4(ab+bc+ca)-1\geq a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca,$$

por lo tanto $3(ab+bc+ca)\geq 1$. Como

$$1\leq 3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2\leq 1,$$

se obtiene $a+b+c=1$. Consecuentemente, $a+b+c=1$ y $3(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$, lo cual implica $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Solución 3.82 Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$(|a|+|b|+|c|)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=9.$$

Luego, $|a|+|b|+|c|\leq 3$. De la desigualdad $MG-MA$ se tiene

$$a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

por lo que $|abc|\leq 1$, que implica $-abc\leq 1$. La desigualdad requerida es obtenida entonces por adición.

Solución 3.83 Note que

$$\frac{OA_1}{AA_1}=\frac{(OBC)}{(ABC)}=\frac{OB\cdot OC\cdot BC}{4R_1}\cdot\frac{4R}{AB\cdot AC\cdot BC}.$$

Luego, se tiene que demostrar que

$$OB \cdot OC \cdot BC + OA \cdot OB \cdot AB + OA \cdot OC \cdot AC \geq AB \cdot AC \cdot BC.$$

Considere las coordenadas complejas $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ y obtenga

$$|b| \cdot |c| \cdot |b-c| + |a| \cdot |b| \cdot |a-b| + |a| \cdot |c| \cdot |c-a| \geq |a-b| \cdot |b-c| \cdot |c-a|.$$

Es decir,

$$|b^2c - c^2b| + |a^2b - b^2a| + |c^2a - a^2c| \geq |ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a|,$$

lo cual es obvio por la desigualdad del triángulo.

Solución 3.84 Sea $S = \{i_1, i_1+1, ..., j_1, i_2, i_2+1, ..., j_2, ..., i_p, ..., j_p\}$ el orden de S, donde $j_k < i_{k+1}$ para $k = 1, 2, ..., p-1$. Defina $S_p = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$, $S_0 = 0$. Entonces

$$\sum_{i \in S} a_i = S_{j_p} - S_{i_p - 1} + S_{j_{p-1}} - S_{i_{p-1}-1} + \cdots + S_{j_1} - S_{i_1 - 1}$$

y

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i + \cdots + a_j)^2 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (S_i - S_j)^2.$$

Es suficiente demostrar una desigualdad de la forma

$$(x_1 - x_2 + \cdots + (-1)^{p+1} x_p)^2 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq p} (x_j - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{p} x_i^2, \tag{4.9}$$

ya que esto significa olvidar los mismos términos no-negativos en la expresión de la derecha de la desigualdad dada. Entonces la desigualdad (4.9) se reduce a

$$4 \sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq p \\ j-i \ par}} x_i x_j \leq (p-1) \sum_{i=1}^{p} x_i^2.$$

Esto puede ser obtenido sumando las desigualdades de la forma $4x_ix_j \leq 2(x_i^2 + x_j^2)$, $i < j$, $j - i =$par (para i impar en la desigualdad, x_i aparece $\left[\frac{p-1}{2}\right]$ veces y para i par, x_i aparece $\left[\frac{p}{2}\right] - 1$ veces).

Solución 3.85 Sean $x = a + b + c$, $y = ab + bc + ca$, $z = abc$. Entonces $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 - 2y$, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = y^2 - 2xz$, $a^2b^2c^2 = z^2$, luego, la

desigualdad se convierte en $z^2 + 2(y^2 - 2xz) + 4(x^2 - 2y) + 8 \geq 9y$, es decir, $z^2 + 2y^2 - 4xz + 4x^2 - 17y + 8 \geq 0$. Ahora como $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca = y$ se obtiene $x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2y \geq 3y$.
También,

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \\ &\geq ab \cdot ac + bc \cdot ab + ac \cdot bc \\ &= (a+b+c)abc = xz, \end{aligned}$$

luego, $y^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2xz \geq 3xz$. De donde,

$$\begin{aligned} z^2 + 2y^2 - 4xz + 4x^2 - 17y + 8 &= \left(z - \frac{x}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}(y-3)^2 + \frac{10}{9}(y^2 - 3xz) \\ &+ \frac{35}{9}(x^2 - 3y) \geq 0, \end{aligned}$$

como era requerido.
Segunda Solución. Desarrollando el lado izquiedo de la desigualdad, se obtiene la desigualdad equivalente

$$(abc)^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq 9(ab + bc + ca).$$

Como $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + bc + ca)$ and $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 6 \geq 4(ab + bc + ca)$ (ya que por ejemplo, $2a^2b^2 + 2 \geq 4\sqrt{a^2b^2} = 4ab$), es suficiente mostrar que

$$(abc)^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2 \geq 2(ab + bc + ca).$$

La parte (i) del ejercicio 1.90 nos dice que es suficiente probar que $(abc)^2 + 2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, pero esto se sigue de la desigualdad $MG - MA$.

Solución 3.86 Escriba

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{abc} + 6(a+b+c)} &= \frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1 + 6a^2bc + 6b^2ac + 6c^2ab}{abc}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1 + 3ab(ac+bc) + 3bc(ba+ca) + 3ca(ab+bc)}{abc}}, \end{aligned}$$

y considere la condición $ab + bc + ca = 1$, para obtener

$$\begin{aligned} &\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1 + 3ab - 3(ab)^2 + 3bc - 3(bc)^2 + 3ca - 3(ca)^2}{abc}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{4 - 3((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2)}{abc}}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $3((ab)^2+(bc)^2+(ac)^2)\geq(ab+bc+ac)^2$ (use la desigualdad de Cauchy-Schwarz). Entonces es suficiente probar que

$$\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{3}{abc}}\leq\frac{1}{abc},$$

que es equivalente a $(abc)^2\leq\frac{1}{27}$. Pero esta última desigualdad es inmediata de la desigualdad $MG-MA$

$$(abc)^2=(ab)(bc)(ca)\leq\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

La igualdad se da si y sólo si $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución 3.87 Por simetría, es suficiente mostrar que $t_1<t_2+t_3$. Se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=n+\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)=$$

$$n+t_1\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)+\frac{1}{t_1}(t_2+t_3)+\sum_{(i,j)\neq(1,2),(1,3)}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right).$$

Usando la desigualdad $MG-MA$, se tiene

$$\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)\geq\frac{2}{\sqrt{t_2t_3}},\quad t_2+t_3\geq 2\sqrt{t_2t_3},\quad\text{y}\quad\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\geq 2,\quad\text{para todo } i,j.$$

Luego, si $a=t_1/\sqrt{t_2t_3}>0$ y utilizando la hipótesis se llega a

$$n^2+1>\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\geq n+2\frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}}+2\frac{\sqrt{t_2t_3}}{t_1}+2\left[\frac{n^2-n}{2}-2\right]=2a+\frac{2}{a}+n^2-4.$$

De donde, $2a+\frac{2}{a}-5<0$ y esto implica $1/2<a=t_1/\sqrt{t_2t_3}<2$, por lo que $t_1<2\sqrt{t_2t_3}$. Una aplicación más de la desigualdad $MG-MA$, implica $t_1<2\sqrt{t_2t_3}\leq t_2+t_3$, como se quería.

Solución 3.88 Note que $1+b-c=a+b+c+b-c=a+2b\geq 0$. Entonces

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\leq a\left(\frac{1+1+(1+b-c)}{3}\right)=a+\frac{ab-ac}{3}.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} b\sqrt[3]{1+c-a} &\leq b+\frac{bc-ba}{3} \\ c\sqrt[3]{1+a-b} &\leq c+\frac{ca-cb}{3}. \end{aligned}$$

Sume estas tres desigualdades, y obtendrá que

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leq a+b+c=1.$$

Solución 3.89 Si alguno de los números es cero o si un número impar de números son negativos, entonces $x_1x_2\cdots x_6 \leq 0$ y la desigualdad es obvia.
Por lo tanto, únicamente podemos tener 2 o 4 números negativos entre los números involucrados en la desigualdad. Supongamos que ninguno de ellos es cero y que hay dos números negativos (para el otro caso, cambie el signo de todos los números). Si $y_i = |x_i|$ entonces, es claro que $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_6^2=6$, $y_1+y_2=y_3+\cdots+y_6$, and that $x_1x_2\cdots x_6=y_1y_2\cdots y_6$.
De la desigualdad $MG-MA$ se obtiene

$$y_1y_2 \leq \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 = A^2.$$

Además, la desigualdad $MG-MA$ garantiza que

$$y_3y_4y_5y_6 \leq \left(\frac{y_3+y_4+y_5+y_6}{4}\right)^4 = \left(\frac{y_1+y_2}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^4}A^4.$$

Por lo tanto, $y_1y_2\cdots y_6 \leq \frac{1}{2^4}A^6$.
Por otro lado, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que,

$$2(y_1^2+y_2^2) \geq (y_1+y_2)^2 = 4A^2$$

$$4(y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2) \geq (y_3+y_4+y_5+y_6)^2 = 4A^2.$$

Es decir, $6=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_6^2 \geq 2A^2+A^2=3A^2$ y entonces $y_1y_2...y_6 \leq \frac{1}{2^4}A^6 \leq \frac{2^3}{2^4}=\frac{1}{2}$.

Solución 3.90 Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz con $(1,1,1)$ y $(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a})$ para obtener

$$(1^2+1^2+1^2)\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right) \geq \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2.$$

La desigualdad $MG - MA$ implica que $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{bca}} = 3$, luego

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

Análogamente, $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{bca}} = 3$. Por lo tanto,

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Sumando $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ en ambos lados, se obtiene el resultado.

Solución 3.91 Note que

$$\frac{a^2+2}{2} = \frac{(a^2-a+1)+(a+1)}{2} \geq \sqrt{(a^2-a+1)(a+1)} = \sqrt{1+a^3}.$$

Después de sustituir en la desigualdad se tiene que demostrar que

$$\frac{a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} + \frac{b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} + \frac{c^2}{(c^2+2)(a^2+2)} \geq \frac{1}{3}.$$

Sea $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, luego $xyz = 64$ y

$$\frac{x}{(x+2)(y+2)} + \frac{y}{(y+2)(z+2)} + \frac{z}{(z+2)(x+2)} \geq \frac{1}{3}$$

si y sólo si

$$3[x(z+2) + y(x+2) + z(y+2)] \geq (x+2)(y+2)(z+2).$$

Ahora, $3(xy+yz+zx)+6(x+y+z) \geq xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8$ si y sólo si $xy+yz+zx+2(x+y+z) \geq xyz+8 = 72$, pero por la desigualdad $MG-MA$ se tiene que $x+y+z \geq 12$ y $xy+yz+zx \geq 48$, lo cual concluye la demostración.

Solución 3.92 Observe que

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} - \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{x^2(y^2+z^2)(x^3-1)^2}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)} \geq 0.$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} &\geq \sum \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}\\ &= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\\ &\geq \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum(x^2-yz)\geq 0.\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se sigue del hecho de que $xyz \geq 1$, es decir, $\frac{1}{x} \leq yz$. La última desigualdad se sigue de la ecuación (1.8).

Segunda Solución. Primero, observe que

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} = \frac{x^5+y^2+z^2-(x^2+y^2+z^2)}{x^5+y^2+z^2} = 1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}.$$

Ahora tiene que probar que

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{x^5+z^2+x^2}+\frac{1}{x^5+x^2+y^2} \leq \frac{3}{x^2+y^2+z^2}.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leq (x^2\cdot x^3+y^2+z^2)(x^2\cdot\frac{1}{x^3}+y^2+z^2)$$

y como $xyz \geq 1$ entonces $x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x} \leq yz$, por lo que

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leq (x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)$$

por lo tanto,

$$\sum \frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \sum \frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \leq \sum \frac{\frac{y^2+z^2}{2}+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{3}{x^2+y^2+z^2}.$$

Solución 3.93 Inicie observando que

$$\begin{aligned}&(1+abc)\left(\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\right)+3\\ &\quad=\frac{1+abc+ab+a}{a(b+1)}+\frac{1+abc+bc+b}{b(c+1)}+\frac{1+abc+ca+c}{c(a+1)}\\ &\quad=\frac{1+a}{a(b+1)}+\frac{b(c+1)}{(b+1)}+\frac{1+b}{b(c+1)}+\frac{c(a+1)}{(c+1)}+\frac{1+c}{c(a+1)}+\frac{a(b+1)}{(a+1)}\geq 6.\end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue después de aplicar la desigualdad $MG - MA$ para seis números.

Solución 3.94 Sea R el circunradio del triángulo ABC. Como $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle COA = 2\angle B$ y $\angle AOB = 2\angle C$ se tiene que

$$\begin{aligned}(ABC) &= (BOC) + (COA) + (AOB) \\ &= \frac{R^2}{2}(\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C) \\ &\leq \frac{R^2}{2} 3 \operatorname{sen}\left(\frac{2A + 2B + 2C}{3}\right) \\ &= \frac{R^2}{2} 3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.\end{aligned}$$

La desigualdad se debe a que la función $\operatorname{sen} x$ es cóncava en $[0, \pi]$.
Por otro lado, como BOC es isósceles, la mediatriz OA' de BC es también bisectriz del ángulo $\angle BOC$ por lo que $\angle BOA' = \angle COA' = \angle A$; análogamente, $\angle COB' = \angle AOB' = \angle B$ y $\angle AOC' = \angle BOC' = \angle C$.
En el triángulo $B'OC'$ la altura sobre el lado $B'C'$ es $\frac{R}{2}$ y $B'C' = \frac{R}{2}(\tan B + \tan C)$, por lo que el área del triángulo $B'OC'$ es $(B'OC') = \frac{R^2}{8}(\tan B + \tan C)$. Análogamente $(C'OA') = \frac{R^2}{8}(\tan C + \tan A)$ y $(A'OB') = \frac{R^2}{8}(\tan A + \tan B)$. Luego,

$$\begin{aligned}(A'B'C') &= (B'OC') + (C'OA') + (A'OB') \\ &= \frac{R^2}{4}(\tan A + \tan B + \tan C) \\ &\geq \frac{R^2}{4} 3 \tan\left(\frac{A + B + C}{3}\right) \\ &= \frac{R^2}{4} 3 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.\end{aligned}$$

La desigualdad ocurre por ser convexa la función $\tan x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$.
De donde se concluye que,

$$(A'B'C') \geq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \geq (ABC).$$

Solución 3.95 Note primero que $a^2 + bc \geq 2\sqrt{a^2bc} = 2\sqrt{ab}\sqrt{ca}$. Análogamente, $b^2 + ca \geq 2\sqrt{bc}\sqrt{ab}$, $c^2 + ab \geq 2\sqrt{ca}\sqrt{bc}$; luego se puede asegurar que

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{bc}\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ca}\sqrt{bc}}\right).$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la siguiente manera

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{bc}\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ca}\sqrt{bc}}\right)^2\leq\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}\right),$$

el resultado se concluye.

Solución 3.96 Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\sum_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j}\sum_{i\neq j}a_ia_j\geq\left(\sum_{i\neq j}a_i\right)^2=\left((n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=(n-1)^2A^2.$$

Por otro lado,

$$\sum_{i\neq j}a_ia_j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)=A^2-A.$$

Solución 3.97 Sin pérdida de generalidad, suponga que $a_1\leq\cdots\leq a_n$. Sea $d_k=a_{k+1}-a_k$ para $k=1,...,n$. Entonces $d=d_1+\cdots+d_{n-1}$. Para $i<j$, se tiene $|a_i-a_j|=a_j-a_i=d_i+\cdots+d_{j-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
s=\sum_{i<j}|a_i-a_j| &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(d_i+\cdots+d_{j-1})\\
&= \sum_{j=2}^{n}(d_1+2d_2+\cdots+(j-1)d_{j-1})\\
&= (n-1)d_1+(n-2)2d_2+\cdots+1\cdot(n-1)d_{n-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)d_k.
\end{aligned}$$

Como $k(n-k)\geq(n-1)$, (ya que $(k-1)(n-k-1)\geq 0$) y $4k(n-k)\leq n^2$ (por la desigualdad $MG-MA$), se obtiene que $(n-1)d\leq s\leq\frac{n^2d}{4}$.

Para ver cuándo la desigualdad del lado izquierdo es igualdad, observe que $k(n-k)=(n-1)\Leftrightarrow n(k-1)=k^2-1\Leftrightarrow k=1$ o $k=n-1$, entonces $(n-1)d=s$ sólo si $d_2=\cdots=d_{n-2}=0$, esto es, $a_1\leq a_2=\cdots=a_{n-1}\leq a_n$.

Para ver cuándo la segunda desigualdad es igualdad, observe que $4k(n-k) = n^2$ $\Leftrightarrow$ $k = n - k$. Si n es impar, la igualdad $4k(n - k) = n^2$ se da únicamente cuando $d_k = 0$, para toda k, por lo tanto, $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Si n es par, es decir, $n = 2k$, la única d_k puede ser distinta de cero y entonces $a_1 = \cdots = a_k \leq a_{k+1} = \cdots = a_{2k}$.

Solución 3.98 Considere el polinomio $P(t) = tb(t^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ct(c^2 - t^2)$. Este satisface las igualdades $P(b) = P(c) = P(-b - c) = 0$, luego $P(t) = (b - c)(t - b)(t - c)(t + b + c)$, ya que el coeficiente de t^3 es $(b - c)$. Por lo que

$$\begin{aligned}|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| &= |P(a)| \\ &= |(b - c)(a - b)(a - c)(a + b + c)|.\end{aligned}$$

El problema es, ahora, encontrar el menor número M que cumpla para todos los números a, b, c, la desigualdad

$$|(a - c)(a - b)(b - c)(a + b + c)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Pero si (a, b, c) cumple la desigualdad, también, $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ la cumple para cualquier número real λ. Por lo que se puede suponer, sin perder generalidad, que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Así el problema se reduce a encontrar el valor máximo de $P = |(a - b)(a - c)(b - c)(a + b + c)|$ para números reales a, b, c que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Note que

$$\begin{aligned}[3(a^2 + b^2 + c^2)]^2 &= [2(a - b)^2 + 2(a - c)(b - c) + (a + b + c)^2]^2 \\ &\geq 8|(a - c)(b - c)|[2(a - b)^2 + (a + b + c)^2] \\ &\geq 16\sqrt{2}|(a - c)(b - c)(a - b)(a + b + c)| \\ &= 16\sqrt{2}P.\end{aligned}$$

Las dos desigualdades se obtienen de aplicar la desigualad $MG - MA$.
Lo que garantiza que $P \leq \frac{9}{16\sqrt{2}}$, y el valor máximo es $\frac{9}{16\sqrt{2}}$, ya que la igualdad ocurre con $a = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}$ y $c = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$.

Solución 3.99 Para $a = 2$, $b = c = \frac{1}{2}$ y $n \geq 3$ la desigualdad no es válida.
Si $n = 1$, la desigualdad se reduce a $abc \leq 1$, que se sigue de $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = 1$.
Para el caso $n = 2$, sea $x = ab + bc + ca$; entonces como $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9 - 2x$ y $x^2 = (ab + bc + ca)^2 \geq 3(a^2bc + ab^2c + abc^2) =$

$3abc(a+b+c) = 9abc$, la desigualdad es equivalente a $abc(9-2x) \leq 3$. Pero, bastará demostrar que $x^2(9-2x) \leq 27$. Ésta última desigualdad es a su vez equivalente a $(2x+3)(x-3)^2 \geq 0$.

Solución 3.100 Primero use la desigualdad $MG-MA$ para ver que $ca+c+a \geq 3\sqrt[3]{c^2a^2}$. Por lo que

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1} \geq \frac{(a+1)(b+1)^2}{ca+c+a+1} = \frac{(a+1)(b+1)^2}{(c+1)(a+1)} = \frac{(b+1)^2}{(c+1)}.$$

Análogamente para los otros dos sumandos; y entonces se tiene

$$\begin{aligned}\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1} + \frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1} + \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}& \\ \geq \frac{(b+1)^2}{(c+1)} + \frac{(c+1)^2}{(a+1)} + \frac{(a+1)^2}{(b+1)}&.\end{aligned}$$

Ahora aplique la desigualdad (1.11).

Solución 3.101 Use la transformación de Ravi $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x$, obtendrá que $x+y+z = \frac{3}{2}$ y $xyz \leq (\frac{x+y+z}{3})^3 = \frac{1}{8}$. Además,

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3} &= \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+4abc}{3} \\ &= \frac{2((y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2)(x+y+z)+4(y+z)(z+x)(x+y)}{3} \\ &= \frac{4}{3}((x+y+z)^3 - xyz) \\ &\geq \frac{4}{3}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{1}{8}\right) = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

Por lo tanto el valor mínimo es $\frac{13}{3}$.

Solución 3.102 Aplique la transformación de Ravi, $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, de tal forma que la desigualdad se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\frac{(2z)^4}{(z+x)(2x)} + \frac{(2x)^4}{(x+y)(2y)} + \frac{(2y)^4}{(y+z)(2z)}& \\ \geq (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)&.\end{aligned}$$

Aplique la desigualdad (1.11) y la desigualdad del ejercicio 1.27, para ver que

$$\begin{aligned}\frac{(2z)^4}{(z+x)(2x)}+\frac{(2x)^4}{(x+y)(2y)}+\frac{(2y)^4}{(y+z)(2z)} &\geq \frac{8(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}\\ &\geq \frac{8(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)}.\end{aligned}$$

Por otro lado $(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)+(x+y)(y+z) = 3(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)$; luego bastará demostrar que $4(x^2+y^2+z^2) \geq 3(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)$, que se reduce a ver que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.

Solución 3.103 La sustitución $x = \frac{a+b}{a-b}$, $y = \frac{b+c}{b-c}$, $z = \frac{c+a}{c-a}$, tiene la propiedad de que $xy+yz+zx = 1$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 3$, por lo tanto $|x+y+z| \geq \sqrt{3} > 1$.

Solución 3.104 Bastará considerar el caso en que $x \leq y \leq z$. Entonces $x = y-a$, $z = y+b$ con $a, b \geq 0$.
Por un lado se tiene que, $xz = 1-xy-yz = 1-(y-a)y-y(y+b) = 1-2y^2+ay-by$ y por otro $xz = (y-a)(y+b) = y^2-ay+by-ab$. Al sumar ambas identidades se tiene que $2xz = 1-y^2-ab$, luego $2xz-1 = -y^2-ab \leq 0$. Si $2xz = 1$ entonces $y = 0$ y $xz = 1$ una contradicción, luego $xz < \frac{1}{2}$.
Los números $x = y = \frac{1}{n}$ y $z = \frac{1}{2}(n-\frac{1}{n})$, cumplen $x \leq y \leq z$ y $xy+yz+zx = 1$. Sin embargo, $xz = \frac{1}{2n}(n-\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}$ puede estar tan cerca como se desee de $\frac{1}{2}$, por lo que el valor $\frac{1}{2}$ no puede mejorarse.

Solución 3.105 Suponga que $a = [x]$ y que $r = \{x\}$. Entonces, la desigualdad es equivalente a

$$\left(\frac{a+2r}{a}-\frac{a}{a+2r}\right)+\left(\frac{2a+r}{r}-\frac{r}{2a+r}\right) > \frac{9}{2}.$$

Que se reduce a

$$2\left(\frac{r}{a}+\frac{a}{r}\right)-\left(\frac{a}{a+2r}+\frac{r}{2a+r}\right) > \frac{5}{2}.$$

Pero como $\frac{r}{a}+\frac{a}{r} \geq 2$, bastará ver que,

$$\frac{a}{a+2r}+\frac{r}{2a+r} < \frac{3}{2}.$$

Pero $a+2r \geq a+r$ y $2a+r \geq a+r$; más aún, en las dos desigualdades anteriores las igualdades no se pueden dar simultáneamente (ya que eso implicaría que

$a = r = 0$), por lo que

$$\frac{a}{a+2r} + \frac{r}{2a+r} < \frac{a}{a+r} + \frac{r}{a+r} = 1 < \frac{3}{2}.$$

Solución 3.106 Aplique la desigualdad (1.11) para ver que

$$a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3^2}{a+b+c},$$

entonces $\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{a+b+c}$. Entonces, bastará demostrar que $a + b + c \geq \frac{3}{abc}$.
Como $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, sucede que

$$(a + b + c)^2 \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{3}{abc}(a + b + c),$$

y de aquí, es inmediato concluir.

Solución 3.107 Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$(a + b + 1)(a + b + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Entonces

$$\frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2+b+c}{(a+b+c)^2} + \frac{a+b^2+c}{(a+b+c)^2} \geq \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Por lo tanto,

$$2(a + b + c) + (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

de aquí el resultado.

Solución 3.108 Para un punto P dentro de ABC, considere el punto Q sobre la mediatriz de BC tal que $AQ = AP$. Sea S la intersección de BP con la tangente a la circunferencia en Q. Entonces, $SP + PC \geq SC$, por lo que $BP + PC = BS + SP + PC \geq BS + SC$.
Por otro lado, $BS + SC \geq BQ + QC$, luego $BP + PC$ es mínimo si $P = Q$.
Sea T el punto medio del segmento MN. Como el triángulo AMQ es isósceles y MT es una de sus alturas, entonces $MT = ZQ$ donde Z es el pie de la altura de Q sobre AB. Luego $MN + BQ + QC = 2(MT + QC) = 2(ZQ + QC)$ es

mínimo cuando Z, Q, C sean colineales y esto significa que CZ es la altura. Por simetría, BQ también deberá ser altura y entonces P es el ortocentro.

Solución 3.109 Sea H el ortocentro del triángulo MNP y sean A', B', C' las proyecciones de H sobre BC, CA, AB, respectivamente. Como el triángulo MNP es acutángulo H está en el interior y también en el interior del triángulo ABC, y entonces

$$x \leq HA' + HB' + HC' \leq HM + HN + HP \leq 2X.$$

La segunda desigualdad es clara, las otras dos son los siguientes dos lemas.
Lema 1. Si H es un punto interior o sobre los lados de un triángulo ABC, y si A', B', C' son sus proyecciones sobre BC, CA, AB, respectivamente, entonces $x \leq HA' + HB' + HC'$, donde x es la longitud de la altura menor de ABC.
Demostración.

$$\frac{HA' + HB' + HC'}{x} \geq \frac{HA'}{h_a} + \frac{HB'}{h_b} + \frac{HC'}{h_c} = \frac{(BHC)}{(ABC)} + \frac{(CHA)}{(ABC)} + \frac{(AHB)}{(ABC)} = 1.$$

Lema 2. Si MNP es un triángulo acutángulo y H es su ortocentro, entonces $HM + HN + HP \leq 2X$, donde X es la altura más grande del triángulo MNP.
Demostración. Suponga que $\angle M \leq \angle N \leq \angle P$, entonces $NP \leq PM \leq MN$ y entonces pasa que X es igual a la altura MM'. Debe ver que $HM + HN + HP \leq 2MM' = 2(HM + HM')$, o equivalentemente que $HN + HP \leq HM + 2HM'$.
Sea H' el punto simétrico de H con respecto a NP; como $MNH'P$ es un cuadrilátero cíclico, el teorema de Ptolomeo dice que

$$H'M \cdot NP = H'N \cdot MP + H'P \cdot MN \geq H'N \cdot NP + H'P \cdot NP$$

y entonces se obtiene que $H'N + H'P \leq H'M = HM + 2HM'$.

Solución 3.110 Suponga, sin pérdida de generalidad, que $x \leq y \leq z$. Por lo que $x + y \leq z + x \leq y + z$, $xy \leq zx \leq yz$, $2z^2(x+y) \geq 2y^2(z+x) \geq 2x^2(y+z)$, $\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2x^2(y+z)}}$. Por la desigualdad del reacomodo, aplicada dos veces, se tiene que

$$\sum \frac{2yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq \sum \frac{xy + zx}{\sqrt{2x^2(y+z)}}.$$

Ahora, al sumar $\sum \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2(y+z)}}$ de ambos lados de la desigualdad anterior, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\sum \frac{2x^2+2yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} &\geq \sum \frac{2x^2+xy+zx}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \\
&= \sum \frac{2x^2+x(y+z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \\
&\geq \sum \frac{2\sqrt{2x^3(y+z)}}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \\
&= 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) = 2.
\end{aligned}
$$

Segunda Solución. Note primero que,

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} &= \frac{x^2-x(y+z)+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{x(y+z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \\
&= \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \sqrt{\frac{y+z}{2}} \\
&\geq \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}.
\end{aligned}
$$

Análogamente para los otros dos sumandos; por lo que

$$\sum \frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq \sum \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Luego, bastará ver que

$$\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 0.$$

Sin perder generalidad, suponga que $x \geq y \geq z$. Luego $\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq 0$, y

$$
\begin{aligned}
\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} &= \frac{(x-z)(y-z)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} - \frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} \\
&\geq \frac{(x-y)(y-z)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} - \frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}
\end{aligned}
$$

$$= (y-z)(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}} - \frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right) \geq 0.$$

La última desigualdad es consecuencia de $y^2(z+x) = y^2z+y^2x \geq yz^2+z^2x = z^2(x+y)$.

Solución 3.111 Por la desigualdad (1.11)

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6+a+b+c+a^2+b^2+c^2}.$$

Entonces, tiene que probar $6+a+b+c+a^2+b^2+c^2 \leq 12$, pero como $a^2+b^2+c^2=3$, es suficiente mostrar que $a+b+c \leq 3$. Pero se tiene también que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 9$.
La igualdad se da si y sólo si $a=b=c=1$.

Solución 3.112 Note primero que

$$1 - \frac{a-bc}{a+bc} = \frac{2bc}{1-b-c+bc} = \frac{2bc}{(1-b)(1-c)} = \frac{2bc}{(c+a)(a+b)}.$$

Por lo que la desigualdad es equivalente a

$$\frac{2bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{2ca}{(a+b)(b+c)} + \frac{2ab}{(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

Simplifique esta última desigualdad para obtener que

$$4\left[bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\right] \geq 3(a+b)(b+c)(c+a),$$

que a su vez es equivalente a la desigualdad

$$ab+bc+ca \geq 9abc.$$

Pero esta última es consecuencia de $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$.

Solución 3.113 Note que $(x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x})^2 = x^2y+y^2z+z^2x+2(xy\sqrt{yz}+yz\sqrt{zx}+zx\sqrt{xy})$.
La desigualdad $MG-MA$ garantiza que

$$xy\sqrt{yz} = \sqrt{xyz}\sqrt{xy^2} \leq \frac{xyz+xy^2}{2},$$

por lo que,

$$(x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x})^2 \leq x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2+3xyz.$$

Como $(x+y)(y+z)(z+x) = x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz$, se tiene que

$$\begin{aligned}(x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x})^2 &\leq (x+y)(y+z)(z+x) + xyz \\ &\leq (x+y)(y+z)(z+x) + \frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x) \\ &= \frac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $K^2 \geq \frac{9}{8}$ y entonces $K \geq \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Como para $x = y = z$, se da la igualdad con $K = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, este valor es el mínimo.

Segunda Solución. Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la siguiente forma:

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x} = \sqrt{x}\sqrt{xy}+\sqrt{y}\sqrt{yz}+\sqrt{z}\sqrt{zx} \leq \sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)}.$$

Después de esto, use la desigualdad $MG - MA$ varias veces para tener

$$\frac{(x+y+z)}{3}\frac{(xy+yz+zx)}{3} \leq \sqrt[3]{xyz}\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = xyz \leq \frac{(x+y)}{2}\frac{(y+z)}{2}\frac{(z+x)}{2}.$$

Solución 3.114 El lado izquierdo de la desigualdad se escribir también como

$$a^2b^2cd+ab^2c^2d+abc^2d^2+a^2bcd^2+a^2bc^2d+ab^2cd^2 = abcd(ab+bc+cd+ac+ad+bd).$$

La desigualdad $MG - MA$ garantiza que $a^2b^2c^2d^2 \leq (\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4})^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4$, por lo que $abcd \leq \frac{1}{16}$. Para ver que el factor $(ab + bc + cd + ac + ad + bd)$ es menor a $\frac{3}{2}$ se pueden seguir los dos caminos siguientes:
Uno es aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para tener que

$$\begin{aligned}&(ab+bc+cd+ac+ad+bd+ba+cb+dc+ca+da+db) \\ &\quad \leq (a^2+b^2+c^2+d^2+a^2+b^2+c^2+d^2+a^2+b^2+c^2+d^2) = 3.\end{aligned}$$

El otro consiste en aplicar la desigualdad $MG - MA$ como sigue:

$$\begin{aligned}&(ab+bc+cd+ac+ad+bd) \\ &\quad \leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2+d^2}{2} + \frac{b^2+d^2}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Solución 3.115 (a) Desarrollando los cuadrados y agrupando los términos se tiene

$$\begin{aligned}(1+x+y)^2 &+ (1+y+z)^2+(1+z+x)^2\\ &= 3+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+2(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

Ahora, aplique la desigualdad $MG-MA$ para obtener

$$\begin{aligned}(x+y+z) &\geq 3\sqrt[3]{xyz}\geq 3\\ (xy+yz+zx) &\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\geq 3\\ (x^2+y^2+z^2) &\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\geq 3.\end{aligned}$$

Luego, $(1+x+y)^2+(1+y+z)^2+(1+z+x)^2\geq 3+4\cdot 3+2\cdot 3+2\cdot 3=27$.
La igualdad se da cuando $x=y=z=1$.
(b) Nuevamente, desarrollando los cuadrados la desigualdad es equivalente a

$$\begin{aligned}3+4(x+y+z)&+2(xy+yz+zx)+2(x^2+y^2+z^2)\\ &\leq 3(x^2+y^2+z^2)+6(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

y también a $3+4u\leq u^2+2v$, donde $u=x+y+z\geq 3$ y $v=xy+yz+zx\geq 3$.
Pero $u\geq 3$ implica que $(u-2)^2\geq 1$. Luego, $(u-2)^2+2v\geq 1+6=7$.
La igualdad se da cuando $u=3$ y $v=3$, es decir, cuando $x=y=z=1$.

Solución 3.116 Note que

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}=\frac{1}{1+a(ab+ac)}=\frac{1}{1+a(3-bc)}=\frac{1}{3a+1-abc}.$$

La desigualdad $MG-MA$ implica que $1=\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, entonces $abc\leq 1$. Luego,

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}=\frac{1}{3a+1-abc}\leq\frac{1}{3a}.$$

Análogamente, $\frac{1}{1+b^2(c+a)}\leq\frac{1}{3b}$ y $\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\frac{1}{3c}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)} &\leq \frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}\\ &= \frac{bc+ca+ab}{3abc}=\frac{1}{abc}.\end{aligned}$$

Solución 3.117 La desigualdad es equivalente a

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq k+(a+b+c)k=(a+b+c+1)k.$$

Por otro lado, usando la condición $a+b+c = ab+bc+ca$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} &= \frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{(a+b+c)^2-abc}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{(a+b+c)}{(a+b+c+1)}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2-abc} \geq 1,$$

y como la igualdad se da si y sólo si $abc = 0$, se tiene que $k = 1$ es el valor máximo.

Solución 3.118 Multiplicando ambos lados de la desigualdad por el factor $(a+b+c)$, se obtiene la desigualdad equivalente

$$9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc \geq 4(a+b+c)^3,$$

la cual es a su vez equivalente a

$$5(a^3+b^3+c^3)+3abc \geq 3(ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)).$$

Por la desigualdad de Schür con $n = 1$, ver el ejercicio 2.83 , se sigue que

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),$$

y la desigualdad de Muirhead nos dice que $2[3,0,0] \geq 2[2,1,0]$, que es equivalente a

$$4(a^3+b^3+c^3) \geq 2(ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)).$$

Sume las últimas desigualdades y obtendrá el resultado.

Solución 3.119 **Lema**. Si a, $b > 0$, entonces $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{ab}$.
Demostración.
Basta notar que $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{4}{ab} = \frac{(a^2+b^2-3ab)^2}{a^2b^2(a-b)^2}$.
Sin perder generalidad suponga que $z = \min\{x,y,z\}$; ahora aplique el lema con $a = (x-z)$ y $b = (y-z)$, para tener

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{(x-z)(y-z)}.$$

Ahora, será suficiente mostrar que $xy + yz + zx \geq (x - z)(y - z)$; pero esto es equivalente a $2z(y + x) \geq z^2$, que es inmediato.

Solución 3.120 Para el caso (i) hay varias maneras de resolverlo.
1^a $forma$. Puede mostrase que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} - 1 = \frac{(yz + zx + xy - 3)^2}{(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2}.$$

2^a $forma$. Con la sustitución $a = \frac{x}{x-1}$, $b = \frac{y}{y-1}$, $c = \frac{z}{z-1}$, la desigualdad por demostrar es $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$, y la condición $xyz = 1$ es equivalente a $abc = (a - 1)(b - 1)(c - 1)$ o $(ab + bc + ca) + 1 = a + b + c$. Con la ayuda de las identidades anteriores se puede obtener que

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2 - 2(a + b + c - 1) \\ &= (a + b + c - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

luego

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c - 1)^2 + 1.$$

El caso (ii) se puede demostrar dependiendo de como se llegó a establecer el caso (i). Por ejemplo, si se demostró de la 2^a forma, la igualdad se tiene cuando $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $a + b + c = 1$. (En la 1^a $forma$ la igualdad se tiene cuando $xyz = 1$ y $xy + yz + zx = 3$). De las ecuaciones se puede cancelar una variable, por ejemplo c (y como $c = 1 - a - b$, si se demuestra que a y b números racionales el c será también un número racional), para llegar a $a^2 + b^2 + ab - a - b = 0$. Esta identidad se puede trabajar como una ecuación cuadrática en b con raíces $b = \frac{1-a\pm\sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2}$, que serán números racionales si $(1 - a)$ y $(1 + 3a)$ son cuadrados de números racionales. Si $a = \frac{k}{m}$, entonces sucede que $m - k$ y $m + 3k$ son cuadrados de números enteros, por ejemplo, si $m = (k - 1)^2 + k$, es claro que $m - k = (k - 1)^2$ y $m + 3k = (k + 1)^2$. Luego, los números racionales $a = \frac{k}{m}$, $b = \frac{m-k+k^2-1}{2m}$ y $c = 1 - a - b$, cuando k varia en los números enteros, son números racionales donde se alcanza la igualdad. Hay unas excepciones $k = 0$, 1, ya que los valores $a = 0$ ó 1 no son valores permitidos.

Notación

Utilizamos la siguiente notación estándar:

$\mathbb{N}$	los números enteros positivos (números naturales)
$\mathbb{R}$	los números reales
$\mathbb{R}^+$	los números reales positivos
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\Rightarrow$	implica
$a \in A$	el elemento a pertenece al conjunto A
$A \subset B$	A es un subconjunto de B
$\lvert x \rvert$	valor absoluto del número real x
$\{x\}$	la parte fraccionaria de un número real x
$[x]$	la parte entera de un número real x
$[a, b]$	el conjunto de números reales x tal que $a \leq x \leq b$
(a, b)	el conjunto de números reales x tal que $a < x < b$
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$	la función f definida en $[a, b]$ con valores en $\mathbb{R}$
$f'(x)$	la derivada de la función $f(x)$
$f''(x)$	la segunda derivada de la función $f(x)$
$\det A$	el determinante de la matriz A
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	el producto $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$
$\prod_{i \neq j} a_i$	el producto para toda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ excepto a_j
$\max\{a, b, \ldots\}$	el máximo valor entre $a, b, \ldots$
$\min\{a, b, \ldots\}$	el mínimo valor entre $a, b, \ldots$
$\sqrt{x}$	la raíz del número real positivo x

$\sqrt[n]{x}$	la $n-$ ésima raíz del número real positivo x
$\exp x = e^x$	la función exponencial
$\sum_{cíclica} f(a, b, \dots)$	representa la suma de la función f evaluada en todas las permutaciones cíclicas de las variables $a, b, \dots$

Utilizamos la siguiente notación en la sección del teorema de Müirhead:

$\sum_! F(x_1, \dots, x_n)$	la suma de $n!$ términos obtenidos cuando se evalúa F en todas las posibles permutaciones de $(x_1, \dots, x_n)$
$(b) \prec (a)$	(a) mayoriza a (b)
$[b] \leq [a]$	$\frac{1}{n!} \sum_! x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \leq \frac{1}{n!} \sum_! x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$

Utilizamos la siguiente notación geométrica:

A, B, C	los vértices del triángulo ABC
a, b, c	las longitudes de los lados del triángulo ABC
A', B', C'	los puntos medios de los lados BC, CA y AB
$\angle ABC$	el ángulo ABC
$\angle A$	el ángulo en el vértice A o la medida del ángulo en el vértice A
(ABC)	el área del triángulo ABC
$(ABCD...)$	el área del polígono $ABCD...$
m_a, m_b, m_c	las longitudes de las medianas del triángulo ABC
h_a, h_b, h_c	las longitudes de las alturas del triángulo ABC
l_a, l_b, l_c	las longitudes de las bisectrices internas del triángulo ABC
s	el semiperímetro del triángulo ABC
r	el inradio del triángulo ABC, el radio del incírculo
R	el circunradio del triángulo ABC, el radio del circuncírculo
I, O, H, G	el incentro, el circuncentro, el ortocentro y el centroide del triángulo ABC
I_a, I_b, I_c	los centros del excírculo del triángulo ABC

Utilizamos la siguiente notación referente a los problemas:

IMO	Olimpiada Internacional de Matemáticas (por sus siglas en inglés)
APMO	Olimpiada de la Cuenca del Pacífico (por sus siglas en inglés)
(país, año)	problema que corresponde a la olimpiada de matemáticas celebrada en ese país, en ese año, en alguna de las etapas

Bibliografía

[1] Altshiller, N., *College Geometry: An Introduction to Modern Geometry of the Triangle and the Circle.* Barnes and Noble, 1962.

[2] Andreescu, T., Feng, Z., *Problems and Solutions from Around the World*, Mathematical Olympiads 1999-2000. MAA, 2002.

[3] Andreescu, T., Feng, Z., Lee, G., *Problems and Solutions from Around the World*, Mathematical Olympiads 2000-2001. MAA, 2003.

[4] Andreescu, T., Enescu, B., *Mathematical Olympiad Treasures.* Birkhäuser, 2004.

[5] Barbeau, E.J., Shawyer, B.L.R., *Inequalities.* A Taste of Mathematics, vol. 4, 2000.

[6] Bulajich, R., Gómez Ortega, J.A., *Geometría*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2002.

[7] Bulajich, R., Gómez Ortega, J.A., *Geometría. Ejercicios y Problemas*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2002.

[8] Courant, R., Robbins, H., *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica, 2002.

[9] Coxeter, H., Greitzer, S., *Geometry Revisited.* New Math. Library, MAA, 1967.

[10] Dorrie, H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics.* Dover, 1965.

[11] Engel, A., *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag, 1998.

[12] Fomin, D., Genkin, S., Itenberg, I., *Mathematical Circles.* Mathematical World, Vol. 7. American Mathematical Society, 1996.

[13] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pòlya, G., *Inequalities.* Cambridge at the University Press, 1967.

[14] Honsberger, R., *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean geometry.* New Math. Library, MAA, 1995.

[15] Kazarinoff, N., *Geometric Inequalities.* New Math. Library, MAA. 1961.

[16] Larson, L., *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1990.

[17] Mitrinovic, D., *Elementary Inequalities.* Noordhoff Ltd-Groningen, 1964.

[18] Niven, I., *Maxima and Minima Without Calculus.* The Dolciani Math. Expositions, MAA, 1981.

[19] Shariguin, I., *Problemas de geometría.* Editorial Mir, 1989.

[20] Soulami, T., *Les Olympiades de Mathématiques.* Ellipses, 1999.

[21] Spivak, M., *Calculus.* Editorial Benjamin, 1967.

Índice